Příklady z kvantové fyziky

Dr Petr Jizba

- **Příklad 1**

  Když je povrch vzorku draslíku ozářen světlem o vlnové délce 3×10^{-7}m, emituje elektrony s kinetickou energií $2,1$eV. Když je stejný vzorek ozářen světlem o vlnové délce $\lambda = 5 \times 10^{-7}$m, emituje vzorek elektrony s kinetickou energií $0,5$eV. Použijte Einsteinovo vysvětlení fotoelktrického jevu k získání hodnoty Planckovy konstanty $\hbar$ (nebo $h = 2\pi\hbar$). Najděte dále minimální energii E_0 která je nezbytná k uvolnění elektronu z povrchu.

  Pozn: $1\text{eV} = 1,6 \times 10^{-19}$J.

- **Příklad 2**

  Světlo ze slabé hvězdy má energetický tok $10^{-10}\text{Jm}^{-2}\text{s}^{-1}$. Předpokládejte, že světlo je monochromatické s vlnovou délkou $\lambda = 5 \times 10^{-7}$m. Určete počet fotonů z této hvězdy které dopadnou do lidského oka za 1 vteřinu.

  Pozn: Předpokládejte, že oční pupila má půměr 5mm.

- **Příklad 3**

  1. Bohrův model vodíkového atomu (1913) předpokládá že *elektrony* jsou nerelativistické klasické částice které se pohybují rychlostí v po kruhových drahách (orbitách) s poloměrem r kolem bodového *protonu.* Bohr postuloval, že moment hybnosti musí být celočíselným násobkem n Planckovy konstanty $\hbar$. Srovnáním přitažlivé síly $e^2/(4\pi\epsilon_0 r^2)$ s odstředivou sílou $m_e v^2/r$ ukažte, že Bohrův model předpovídá energii elektronu ve tvaru

     $$E_n = -m_e c^2 \alpha^2/(2n^2)\,.$$

     α reprezentuje konstantu jemné struktury $\alpha = e^2/(4\pi\epsilon_0\hbar c) \approx 1/137$.

  2. Elektron v $n = 1$ stavu (základním energetickém stavu) má $r = r_0$, kde r_0 je Bohrův poloměr. Ukažte, že $r_0 = \lambda_C/\alpha$ kde λ_C je Comptonova vlnová délka. Ukažte, že rychlost elektronu v základním stavu je $v = \alpha c$, což zaručuje, že nerelativistická Bohrova aproximace je správná .

  3. Když je elektron vybuzen (excitován) do stavu s $n > 1$, vratí se po čase do nižšího energetického stavu a při tom emituje foton. Jaká je maximální energie kterou emitovaný foton může získat? Jaká je minimální vlnová delka λ_{min}? Ukažte, že $\lambda_{min} \gg r_0$.

- **Příklad 4**

  Mion μ^- má stejný elektrický náboj jako elektron, ale hmotnost $m_\mu = 207 m_e$. Může být zachycen volným protonem a vytvořit atom, tkzv. “mionový” či “μ-mezický” atom. Nalezněte poloměr první Bohrovy orbity v tomto atomu.

- **Příklad 5**

  Předpokládejte, že máte dynamické proměnné A_i, B_j a jim přiřazené (Hermitovské) oparátory $\hat{A}_i, \hat{B}_j$. Diracova kvantovací podmínka potom přiřazuje Poissonovým závorkám na kvantové úrovni komutátory podle předpisu

  $$\{A_1, A_2\} = A_3 \to \left[\hat{A}_1, \hat{A}_2\right] = i\hbar\hat{A}_3 \,.$$

  Dokažte, že Diracova reprezentace Poissonových závorek prostřednictvím komutátorů je jedinou možností která je kompatibilní s 5 základními vlastnostmi Poissonových závorek (viz, přednáška). V důkazu můžete (ale numusíte) postupovat následujícím způsobem: Definujte $\{\hat{A}_i, \hat{B}_j\}_{QM}$ jakožto kvantově mechanický analog $\{A_i, B_j\}$. S užitím algebraických vlastností Poissonových závorek spočtěte

  $$\{\hat{A}_1\hat{A}_2, \hat{B}_1\hat{B}_2\}_{QM} \,,$$

  a dokažte, že z výsledku lze usoudit, že platí

  $$\{\hat{A}_1, \hat{B}_1\}_{QM}\left(\hat{A}_2\hat{B}_2 - \hat{B}_2\hat{A}_2\right) = \left(\hat{A}_1\hat{B}_1 - \hat{B}_1\hat{A}_1\right)\{\hat{A}_2, \hat{B}_2\}_{QM} \,.$$

  Z nezávislosti $\hat{A}_1, \hat{B}_1$ a $\hat{A}_2, \hat{B}_2$ usuďte, že

  $$c\{\hat{A}_i, \hat{B}_i\}_{QM} = \left(\hat{A}_i\hat{B}_i - \hat{B}_i\hat{A}_i\right) = \left[\hat{A}_i, \hat{B}_i\ \right] \,,$$

  c je c-číslo. Dokažte, že $\mathrm{Re}(c) = 0$. Dokažte dále, že pokud klasicky platí $\{A_1, A_2\} = A_3$ vede předchozí rovnice k závěru, že v kvantové mechanice musí platit

  $$\left[\hat{A}_1, \hat{A}_2\right] = i|c|\hat{A}_3 \,.$$

- **Příklad 6**

  1. Dokažte pravidlo pro výpočet komutátorů

     $$\left[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}\right] = \left[\hat{A}, \hat{B}\right]\hat{C} + \hat{B}\left[\hat{A}, \hat{C}\right] \,,$$

     a dokažte tedy, že $[\hat{x}, \hat{p}^2] = 2i\hbar\hat{p}$. Dále dokažte (napr. indukcí), že obecně platí

     $$[\hat{x}, \hat{p}^n] = ni\hbar\hat{p}^{n-1} \,.$$

  2. Definujeme-li

     $$e^{-ia\hat{p}/\hbar} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-\frac{ia\hat{p}}{\hbar}\right)^n \,,$$

     (a je c-číslo) dokažte, že

     $$\left[\hat{x}, e^{-ia\hat{p}/\hbar}\right] = ae^{-ia\hat{p}/\hbar} \,,$$

     a tudíž

     $$\hat{x}e^{-ia\hat{p}/\hbar} = e^{-ia\hat{p}/\hbar}(\hat{x} + a) \,.$$

     Ukažte, že z poslední rovnice vyplývá , že

     $$e^{-ia\hat{p}/\hbar}|x\rangle = |x + a\rangle \quad \text{a} \quad \langle x + a| = \langle x|e^{ia\hat{p}/\hbar} \,.$$

- **Příklad 7**

1. V souladu s klasickou mechanikou definujte operátor momentu hybnosti jako $\hat{\mathbf{L}} = \hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{p}}$, t.j., $\hat{L}_i = \epsilon_{ijk}\hat{x}_j\hat{p}_k$. S použitím vlastností komutátorů dokažte, že

$$\left[\hat{L}_i, \hat{x}_l\right] = i\hbar\epsilon_{ilj}\hat{x}_j\,, \quad \left[\hat{L}_i, \hat{\mathbf{x}}^2\right] = 0\,, \quad \left[\hat{L}_i, \hat{p}_m\right] = i\hbar\epsilon_{imk}\hat{p}_k\,, \quad \left[\hat{L}_i, \hat{\mathbf{p}}^2\right] = 0\,,$$
$$\left[\hat{L}_i, \hat{L}_j\right] = i\hbar\epsilon_{ijk}\hat{L}_k\,, \quad [\hat{L}_i, \hat{\mathbf{L}}^2] = 0\,.$$

   K důkazu se vám mohou hodit relace $[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0$ and $[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij}$.

2. Předpokládejte, že máte Hamiltonián $\hat{H} = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + V(|\hat{\mathbf{x}}|)$ (t.j., potenciální energie závisí jen na velikosti $\mathbf{x} \Rightarrow$ sféricky symetrický problém). Dokažte potom, že $[\hat{\mathbf{L}}, \hat{H}] = 0$. V důkazu můžete předpokládat, že potenciál V se dá rozvinout do Taylorovy řady.