Priklady z kvantove fyziky II

Dr Petr Jizba

- **Priklad 1**

1. Ukazte, ze operatory (v tomto pripade matice)

$$\hat{S}_x \;=\; \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\; ; \quad \hat{S}_y \;=\; \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\; ; \quad \hat{S}_z \;=\; \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\,,$$

splnuji komutacni relace pro moment hybnosti, t.j., $\left[\hat{S}_i, \hat{S}_j\right] \;=\; i\hbar\varepsilon_{ijk}\hat{S}_k$ (s konvenci $(1,2,3) \equiv (x,y,z)$) a tudiz mohou byt identifikovany s operatorem momentu hybnosti (operatorem spinu).

2. Uvazujte dynamicky model popsany Hamiltonianem:

$$\hat{H} \;=\; \hat{\mathbf{1}} + \alpha\sigma_x \;=\; \begin{pmatrix} 1 & -i\alpha \\ i\alpha & 1 \end{pmatrix}.$$

(Matice σ_x se nazyva x-ova Pauliho matice, α je systemova konstanta.). Predpokladejte, ze v case $t = 0$ je system popsan stavem $|\psi(0)\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Jak vypada stav v obecnem case t? Pouzijte metodu primeho reseni Schrödingerovy rovnice $i\hbar|\psi(t)\rangle = \hat{H}|\psi(t)\rangle$.

3. Pro predchozi system spoctete jake jsou mozne pozorovane vysledky energie (t.j., reste ulohu na vlastni cisla: $\hat{H}|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle$). Dokazte, ze jsou obecne dve mozne pozorovane hodnoty energie $E_\pm = 1 \pm \alpha$. Jake jsou vlastni vektory (t.j., stavy) odpovidajici hodnotam $E_\pm$?

4. Rozvinte stav $|\psi(0)\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ prostrednictvim vlastnich vektoru Hamiltonianu odpovidajicich hodnotam $E_\pm$. Pouzitim vztahu z prednasky

$$|\psi(t)\rangle \;=\; e^{-it\hat{H}/\hbar}|\psi(0)\rangle\,, \tag{0.1}$$

a vypostete hodnotu stavu $|\psi(t)\rangle$. Pri vypoctu se vam muze hodit implikace $\hat{X}|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle \Rightarrow f(\hat{X})|\psi\rangle = f(\lambda)|\psi\rangle$. $f(\ldots)$ je obecna funkce operatoru $\hat{X}$.

5. Neurcitost momentu hybnosti $\hat{S}_x$ je definovana jako $(\triangle S_x)^2 = \langle \hat{S}_x^2\rangle - \langle \hat{S}_x\rangle^2$. Jaka je stredni hodnota $\hat{S}_x$ ve stavu $|\psi(t)\rangle$? Jaka je hodnota $\langle \hat{S}_x^2\rangle$ ve stavu $|\psi(t)\rangle$? Cemu se rovna $\triangle S_x$?

6. Zobecnene relace neurcitosti odvozene na prednasce maji pro pozorovatelne S_x, S_y a S_z tvar

$$\triangle S_x \triangle S_y \;\geq\; \frac{1}{2}\left|\langle\psi(t)|[\hat{S}_x, \hat{S}_y]|\psi(y)\rangle\right| = \frac{\hbar}{2}\left|\langle\psi(t)|\hat{S}_z|\psi(y)\rangle\right|.$$

Vypoctete $\triangle S_y$ (analogickym zpusobem jako jste vypocetli $\triangle S_x$) a tudiz urcete $\triangle S_x \triangle S_y$. Spoctete $\langle\psi(t)|\hat{S}_z|\psi(t)\rangle$ a dokazte, ze zobecnene relace neurcitosti jsou saturovany ve stavu $|\psi(t)\rangle$ pro vsechny hodnoty t.

- **Priklad 2**

1. Relace neurcitosti pro pozici a hybnost v jedne dimenzi maji tvar

$$\triangle x \triangle p \;\geq\; \frac{\hbar}{2}\,.$$

Presvecte se, ze tyto relace neurcitosti jsou saturovany ve stavu

$$\langle x|\psi\rangle \;=\; \psi(x) \;=\; \left(2\pi(\triangle x)^2\right)^{-1/4}\; \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{4(\triangle x)^2} + \frac{ip_0}{\hbar}\right)$$

2. Pokuste se interpretovat vyznam konstant x_0 a p_0.

- **Priklad 3**

1. Castice s $m = \hbar$ se volne pohybuje v jedne dimenzi a je po popsana vlnovou funkci

$$|\psi(t)\rangle \;=\; \psi(x,t) \;=\; \frac{1}{\pi^{1/4}(1+it)^{1/2}}\;\exp\left(\frac{-x^2}{2(1+it)}\,.\right)$$

Verifikujte, ze tato vlnova funkce je normalizovana. Spoctete hustotu pravdepodobnosti a pravdepodobnostni proud a verifikujte, ze tyto splnuji zakon zachovani pravdepodobnosti.

2. Jaka je pravdepodobnost v case t, ze castice je v intervalu $-\epsilon < x < \epsilon$ (uvazujte infinitesimalni ϵ).