Priklady z kvantove fyziky III

Dr Petr Jizba

- **Priklad 1**

1. Nacrtnete potencial

$$V(x) \;=\; -\frac{\hbar^2}{m}\,\mathrm{sech}^2 x\,,$$

a ukazte, ze bezcasova Schrödingerova rovnice pro castici v tomto potencialu se muze zapsat ve tvaru

$$A^\dagger A\psi(x) \;= (\varepsilon+1)\psi(x)\,,$$

kde $\varepsilon = 2mE/\hbar^2$ a

$$A \;=\; \frac{d}{dx} + \tanh x\,, \qquad A^\dagger \;=\; -\frac{d}{dx} + \tanh x\,.$$

2. Prostrednictvim integrace *per partes* ukazte, ze pro kazdou normalizovanou vlnovou funkci $\langle x|\chi\rangle = \chi(x)$ platí

$$\int_{-\infty}^{\infty} \chi^*(x)A^\dagger A\chi(x)\; dx \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} (A\chi(x))^*(A\chi(x))\; dx\,,$$

a tudiz dokazte, ze vlastni hodnoty operatoru $A^\dagger A$ nemohou byt negativni. Ukazte, ze vlnova funkce zakladniho stavu musi mit $\varepsilon \geq -1$. Ukazte dale, ze existuje vlnova funkce $\chi_0(x)$ s $\varepsilon = -1$ a, ze splnuje rovnicici

$$\frac{d\chi_0}{dx} + (\tanh x)\chi_0 \;=\; 0\,.$$

Naleznete a nacrtnete $\chi_0(x)$. (Pozn: uvedeny priklad je dulezity v jaderne fyzice a v supersymetricke kvantove mechanice.)

- **Priklad 2**

1. Hamiltonuv operator $\hat{H}$ pro castici v jedne dimenzi je $\hat{H} = \hat{T} + \hat{V}$ kde $\hat{T} = \hat{p}^2/2m$ a $\hat{V}$ je potencialni energie. Ukazte, ze stredni hodnota $\langle T\rangle$ je positivni v kazdem (normalizovatelnem) stavu. Uvazujte $\langle H\rangle$ a ukazte, ze energie nejnizsiho vazaneho stavu (pokud existuje) je vyssi nez minimalni hodnota potencialni energie V.
2. Predpokladejte, ze χ je vlastnim stavem $\hat{H}$ prislusejici energii E. Ukazte, ze pro kazdy operator $\hat{\Lambda}$ potom plati

$$\langle[\hat{H},\hat{\Lambda}]\rangle_\chi \;=\; \langle\chi|[\hat{H},\hat{\Lambda}]|\chi\rangle \;=\; 0\,.$$

Zvolte nyni $\hat{\Lambda} = \hat{x}$. Dokazte, ze z predchozi relace vyplyva, ze $\langle p\rangle_\chi = 0$. Dokazete zduvodnit proc je tento vysledek *prirozeny.*

3. Predpokladejte, ze $\hat{V}(x) = k\hat{x}^n$ (k a n jsou konstanty). Zvolte $\hat{\Lambda} = \hat{x}\hat{p}$ a odvodte *virialovy teorem*

$$2\langle T\rangle_\chi \;=\; n\langle V\rangle_\chi\,.$$

S pomoci virialoveho teoremu ukazte, ze

$$\langle T\rangle_\chi \;=\; \frac{n}{n+2}\,E\,.$$

- **Priklad 3**

  Castice s hmotnosti m se pohybuje v potencialu $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$ (tj. v harmonickem potencialu). Vyjadrete stredni hodnotu energie $E = \langle H \rangle$ prostrednictvim $\langle x \rangle$, $\langle p \rangle$, Δx a Δp. Pouzijte relace neurcitosti mezi x a p a ukazte, ze v *kazdem* stavu plati

  $$E \;=\; \langle H \rangle \;\geq\; \tfrac{1}{2}\,\hbar\omega\,.$$

  Interpretujte tento vysledek.

- **Priklad 4**

  1. Castice s hmotnosti m je v jedno–dimenzionalni nekonecne ctvercove potencialni jame s $V(x) = 0$ pro $-a/2 < x < a/2$ a $V = \infty$ pro ostatni x. S pouzitim vysledku z prednasky ukazte, ze energeticke spektrum je

     $$E_n \;=\; \frac{(\hbar\pi n)^2}{2ma^2}\,, \qquad n > 0\,.$$

  2. Predpokladejte, ze nejen V jde do nekonecna, ale take interval se zuzuje k nule a to tak ze mohutnost $a^2V(x) = c = const.$. Ukazte, ze v tomto pripade je jen jeden vazany stav a urcete prislusnou energii E_1.

- **Priklad 5**

  1. Napiste casove nezavislou Schrödingerovu rovnici pro vlnovou funkci ψ pro castici pohybujici se v potencialu $V(x) = -U\delta(x)$ (U je positivni konstanta a $\delta(x)$ je Diracova delta funkce). Integrujte rovnici v intervalu $-\epsilon < x < \epsilon$, pro libovolnou positivni konstantu ϵ, a ukazte, ze derivace vlnove funkce ma v $x = 0$ diskontinuitu ktera splnuje podminku

     $$\lim_{\epsilon\to 0}\,[\psi'(\epsilon) - \psi'(-\epsilon)] \;=\; -\frac{2mU}{\hbar^2}\,\psi(0)\,.$$

  2. Ukazte, ze existuje jediny vazany stav $\psi_0(x)$ s $E < 0$. Naleznete tento zakladni stav a urcete jeho energii.