Sada příkladů z kvantové fyziky č.1

Termín odevzdání: před cvičením 5.10.

Poznámka: tato sada příkladů je dobrovolná a vypočítané příklady budou přičteny k celkovému počtu vyřešených příkladů.

Důležitým pojmem ve fyzice je tzv. dualita částic a vlnění, kdy částice vykazují v některých případech vlnové vlastnosti a jindy se chovají jako tělesa. Tento paradox řeší právě kvantová mechanika pomocí svých postulátů. My si v následujících příkladech ukážeme některé jevy, které byly motivací ke zrodu kvantové mechaniky.

Příklad č.1

a) Fotoelektrický jev

Vzorek draslíku je ozařován monochromatickým světlem o vlnové délce $300nm$. Z obalu atomu jsou emitovány elektrony s kinetickou energií $2.1eV$. Pokud ozáříme stejný vzorek světlem o vlnové délce $500nm$, vzorek emituje elektrony s energií $0.5eV$. Spočtěte minimální napětí E_0, které je potřebné k tomu, aby byl ve vzorku pozorován elektrický proud. Spočtěte na základě měření velikost planckovy konstanty $\hbar = h/2\pi$. $1eV = 1.6 \cdot 10^{-19} J$

b) Světlo ze vzdálené hvězdy

Světlo ze slabé hvězdy má energetický tok $10^{-10} Jm^{-2}s^{-1}$. Předpokládejte, že světlo je monochromatické s vlnovou délkou $\lambda = 5 \cdot 10^{-7}m$. Určete počet fotonů z této hvězdy, které dopadnou do lidského oka za 1 vteřinu. Předpokládejte, že oční pupila má průměr 5mm.

Příklad č.2

Comptonův rozptyl

Foton s energií E_γ dopadá na elektron, který je v klidu a rozptýlí se na něm pod úhlem θ. Odvoďte tzv. Comptonův posun $\Delta\lambda$, tedy změnu vlnové délky v závislosti na úhlu rozptylu θ. Spočítejte jak se změní vlnová délka fotonu s energií $1.77eV$ při rozptylovém úhlu 30°. Jakému typu záření odpovídají tyto fotony? Ukažte, že maximální rozdíl vlnových délek je roven $\lambda_C = \frac{h}{m_e c}$ - Comptonova vlnová délka.

Příklad č.3

Záření černého tělesa

Planckův zákon udává vztah mezi spektrální hustotou energie absolutně černého tělesa a frekvencí ν:

$$\mathfrak{u}(\nu, T)\mathrm{d}\nu = \frac{8\pi}{c^3} \frac{h\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} \mathrm{d}\nu. \tag{1}$$

(vztah bude v případě zájmu odvozen na cvičení.) Odvoďte:

a) závislost $\mathfrak{u}(\nu, T)$ pro nízké frekvence (Rayleigh-Jeansův zákon)

aproximujte exponencielu ve jmenovateli polynomem prvního řádu a upravte

b) závislost maxima funkce $\mathfrak{u}(\lambda, T)$ na teplotě (Wienův posunovací zákon)

vyjádřete $\mathfrak{u}$ *jako funkci* λ, T *spočtěte* $\frac{\partial \mathfrak{u}(\lambda, T)}{\partial \lambda}$*, položte rovno nule a nalezněte závislost*

λ na T
c)celkovou hustotu energie $\epsilon(t) = \int_0^\infty u(\nu, T)\mathrm{d}\nu$ (Stefan-Boltzmanův zákon).
Pozn.: $\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1}\mathrm{d}x = \frac{\pi^4}{15}$.

Příklad č.4
Bohrův model atomu
Bohrův model atomu (1913) je semiklasický model, který předpokládá, že atom je složen z nehybného jádra (protonů) a z elektronů, které:
1) se pohybují po kruhových drahách 2) velikost jejich momentu hybnosti je dána celočíselným násobkem redukované Planckovy konstanty $\hbar$.
Porovnáním přitažlivé elektrické síly ($\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$) s odstředivou silou ($\frac{mv^2}{r}$) spočítejte energetické hladiny eletronu v atomovém obalu. Spočítejte vzdálenost elektronu od jádra v základním stavu. Tato vzdálenost se nazývá Bohrův poloměr a značí se a_0. Ukažte, že $a_0 = \frac{\lambda_C}{\alpha}$, kde $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \doteq \frac{1}{137}$ je tzv. konstanta jemné struktury.