Sada příkladů z kvantové fyziky č.2

Termín odevzdání: před cvičením 19.10.

Ke studiu kvantové mechaniky je potřeba se seznámit s některými matematickými sturkturami studovanými ve funkcionální analýze: lineární operátory, komutátory, vlnové funkce a další. Poslední příklad se věnuje de Broglieho hypotéze a jejím důsledkům.

Příklad č.1
Lineární operátory
Nechť $\psi(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Které z následujících operátorů jsou lineární?
a) $\hat{A}\psi(x) = c\psi(x)$, kde $c \in \mathbb{C}$
b) $\hat{B}\psi(x) = \psi^2(x)$
c) $\hat{C}\psi(x) = \overline{\psi(x)}$
d) $\hat{T}_a\psi(x) = \psi(x - a)$
e) $\hat{X}\psi(x) = x\psi(x)$
f) $\hat{P}\psi(x) = -i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\psi(x)$
g) $\hat{K}\psi(x) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\psi(x)$
h) $\hat{H}\psi(x) = \left[-\frac{\hbar}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - V(x)\right]\psi(x)$, kde m je konstanta a $V(x)$ je reálná funkce

Mějme dva lineární operátory $\hat{A}$, $\hat{B}$, jsou následující výrazy také lineární?
$\hat{A} + \hat{B}$, $\hat{A}\hat{B}$, $\exp(\hat{B}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\hat{B})^n}{n!}$
Čemu se rovná $(\hat{A} - \hat{B})(\hat{A} + \hat{B})$?

Příklad č.2
Vlnové funkce
Mohou následující funkce být vlnovými funkcemi na daném intervalu? Pokud ano, určete normalizační konstantu.
a) $\psi_1(x) = ax$, na $[0, +\infty)$
b) $\psi_2(x) = bx^2$, na $(-\infty, \infty)$
c) $\psi_3(x) = c\sin\left(\frac{n\pi}{2l}(x - l)\right)$, na intervalu $[-l, l]$, kde $n \in \mathbb{N}$
d) $\psi_4(x) = \begin{cases} d(a^2 - x^2) \text{ pro } |x| < a \\ 0 \quad \text{jinak} \end{cases}$, na $(-\infty, \infty)$
e) $\psi_5(x) = ge^{-x^2}$ na intervalu $(-\infty, \infty)$
Pozn.: v příkladu e) můžete potřebovat tzv. Gaussův integrál

Jaká je pravděpodobnost nalezení elektronu v poli vodíkového obalu ve vzdálenosti $[r, r + \mathrm{d}r]$ od jádra v čase t_0, jehož vlnová funkce je dána jako

$$\psi(x, y, z) = Ae^{-\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{a_0}}. \tag{1}$$

Pozn.: transformujte do sférických souřadnic, nezapomeňte na Jakobián

Příklad č.3
Komutátory
komutátor operátorů $\hat{A}, \hat{B}$ je definován následujícím způsobem: $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$.
a) spočítejte následující komutátory ze znalosti $[\hat{A}, \hat{B}]$
$[\hat{A}, \hat{A}]$, $[\hat{B}, \hat{A}]$, $[\hat{A} + \hat{B}, \hat{C}]$, $[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}]$, $[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}]$
b) Nechť $\hat{X}\psi(x) = x\psi(x)$, $\hat{P}\psi(x) = -i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\psi(x)$. Spočtěte $[\hat{X}, \hat{X}]$, $[\hat{X}, \hat{P}]$,$[\hat{X}^2, \hat{P}]$,$[\hat{X}, \hat{P}^2]$.
c) Ukažte, že $[\hat{X}, \hat{P}^n] = ni\hbar\hat{P}^{n-1}$
d) $\hat{K} = \left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^2$, $\hat{L} = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x\right)^2$. Platí, že $\hat{K} = \hat{L}$?

Příklad č.4
de Broglieho hypotéza
a) čemu se je úměrná pravděpodobnost nalezení částice popsané de Broglieho vlnou

$$\psi_{\vec{p},E}(\vec{x}, t) = A\exp\left(\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\vec{x} - Et)\right) \tag{2}$$

v intervalu $(x_1, x_2) \times (y_1, y_2) \times (z_1, z_2)$?
b) určete vlnovou délku a frekvenci de Broglieho vlny pro molekulu O_2 za pokojové teploty a pro částici vážící $10\mu g$ a rychlosti zvuku.

Bonusový příklad (za extra body): Mějme vlnovou funkci v 1D v čase $t = 0$ definovanou jako

$$\psi(x) = C\exp(-Ax^2 + Bx) \tag{3}$$

- vlnový balík. Nalezněte koeficienty $\psi(p)$ rozvoje $\psi(x)$ do rovinných vln $e^{\frac{ipx}{\hbar}}$, z nich lze pak vyjádřit $\psi(x)$ jako

$$\psi(x) = \int \mathrm{d}p\psi(p)e^{\frac{ipx}{\hbar}}. \tag{4}$$

Pozn.: nastudujte si základní principy Fourierovy transformace - např. Wikipedie...