# Sada příkladů z kvantové fyziky č.4

Termín odevzdání: před cvičením 16.11.

*V této sadě se zaměříme na některé vlastnosti kvantové mechaniky jako Ehrenfestovy teorémy, střední hodnoty operátorů a relace neurčitosti.*

**Příklad č.1**
*Moment hybnosti v centrálně symetrickém potenciálu*
Ukažte, že pro centrálně symetrický hamiltonián

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{\vec{P}}^2 + \hat{V}(r) \tag{1}$$

komutují složky momentu hybnosti s Hamiltoniánem, tedy: $[\hat{L}_i, \hat{H}] = 0$.
*Pozn.: K důkazu můžete využít vyjádření $\hat{H}$ ve sférických souřadnicích, kde část závislá na $r$ komutuje s libovolnou složkou momentu hybnosti, protože ty nezávisí na $r$. Je tedy třeba dokázat pouze, že $[\hat{L}_i, \hat{L}^2] = 0$. Dostáváme tedy, že $\hat{H}, \hat{L}^2, \hat{L}_3$ jsou komutující operátory. Dá se navíc ukázat, že společné vlastní podprostory mají pro daná vlastní čísla dimenzi jedna (společné vlastní vektory jsou určeny jednoznačeně až na násobek), tedy tyto operátory tvoří úplnou množinu pozorovatelných.*

**Příklad č.2**
*Třetí Ehrenfestův teorém*
Ukažte, že pro střední hodnotu momentu hybnosti platí vztah analogický s klasickou mechanikou, tedy

$$\left\langle \frac{\mathrm{d}\hat{\vec{L}}}{\mathrm{d}t} \right\rangle = \left\langle \hat{\vec{M}} \right\rangle \tag{2}$$

kde $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}(\vec{r})$ je moment síly. Předpokládejte, že se potenciál dá rozvinout do Taylorovy řady.
*Pozn.: Protože jde o vektorovou identitu, můžeme jí dokazovat po složkách. Bez újmy na obecnosti lze ukázat jen pro jednu složku, protože ostatní složky bychom dostali záměnou souřadnic. Pokud přejdeme do sférických souřadnic, můžeme využít jednoduchého tvaru $\hat{L}_z$. Víme, že $\hat{L}_z$ komutuje s kinetickou částí hamiltoniánu, je třeba spočítat komutátor s potenciálem. Zde rozvineme potenciál do Taylorovy řady podle úhlové proměnné a spočteme člen po členu. Výsledek bude shodný s předpisem pro třetí složku momentu síly.*

**Příklad č.3**
*Střední hodnota operátoru, střední kvadratická odchylka operátoru*
Pro vlnový balík

$$\psi(x) = C\exp(-Ax^2 + Bx) \tag{3}$$

spočtěte $\langle \hat{X} \rangle_\psi$, $\langle \hat{P} \rangle_\psi$, $\langle \hat{X}^2 \rangle_\psi$, $\Delta_\psi \hat{X}$.

**Příklad č.4**

*Heisenberovy relace neurčitosti*

a) pro operátory $\hat{X}$, $\hat{P}$ platí relace neurčitosti

$$\Delta_\psi \hat{X} \Delta_\psi \hat{P} \geq \frac{\hbar}{2}. \tag{4}$$

Ukažte, že rovnost je splněna pro vlnové balíky

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{1}{4}}} \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{4\sigma^2} + \frac{ip_0}{\hbar}\right). \tag{5}$$

Jaký význam mají konstanty ve vlnové funkci?

b) jaký budou mít tvar relace neurčitosti pro dvě složky momentu hybnosti?
c) rozmyslete si, jaký tvar má v kvantové mechanice operátor času $\hat{t}$ (v analogii s operátorem polohy) a rozmyslete si jaký další tvar kromě $\hat{H}$ má operátor energie? (Tvar operátoru energie plyne ze Schrödingerovy rovnice - analogie s operátorem hybnosti). Z daných faktů určete tvar relací neurčitosti pro energii a čas.