Konečné grupy

1. Rozhodněte, zda daná množina spolu se zadanou operací tvoří grupu. Pokud ano, je tato grupa Abelova (komutativní)?

   a) množina $\mathbb{Z}_{10} = \{0, 1, 2, \ldots, 8, 9\}$ s operací sčítání modulo 10
   b) množina $\mathbb{Z}_{10} = \{0, 1, 2, \ldots, 8, 9\}$ s operací násobení modulo 10
   c) množina $\{1, 2, \ldots, 8, 9\}$ s operací násobení modulo 10
   d) množina $\mathbb{Z}_{10}^* = \{k \in \mathbb{N} \mid 1 \leq k \leq 10, k \perp 10\} = \{1, 3, 7, 9\}$ s operací násobení modulo 10
   e) množina $\mathbb{Z}_5^* = \{1, 2, 3, 4\}$ s operací násobení modulo 5
   f) množina $\mathbb{P}_3$ všech permutací tří prvků s operací skládání permutací

2. Určete řády všech prvků zadané grupy.

   a) $(\mathbb{Z}_6, +)$, $+$ značí sčítání modulo 6
   b) $(\mathbb{Z}_5^*, \cdot)$, $\cdot$ značí násobení modulo 5
   c) $(\mathbb{Z}_{10}^*, \cdot)$, $\cdot$ značí násobení modulo 10
   d) $(\mathbb{Z}_{20}^*, \cdot)$, $\mathbb{Z}_{20}^* = \{1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19\}$ a $\cdot$ značí násobení modulo 20
   e) $(\mathbb{Z}_7^*, \cdot)$, $\mathbb{Z}_7^* = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ a $\cdot$ značí násobení modulo 7

3. Je zadaná grupa cyklická? Pokud ano, najděte všechny její generátory.

   a) $(\mathbb{Z}_6, +)$, $+$ značí sčítání modulo 6
   b) $(\mathbb{Z}_5, +)$, $+$ značí sčítání modulo 5
   c) $(\mathbb{Z}_5^*, \cdot)$, $\cdot$ značí násobení modulo 5
   d) $(\mathbb{Z}_{10}^*, \cdot)$, $\cdot$ značí násobení modulo 10
   e) $(\mathbb{Z}_{20}^*, \cdot)$, $\cdot$ značí násobení modulo 20
   f) $(\mathbb{P}_3, \circ)$

4. Najděte všechny podgrupy zadané grupy a určete, které z nich jsou cyklické.

   a) $(\mathbb{Z}_6, +)$, $+$ značí sčítání modulo 6
   b) $(\mathbb{Z}_5^*, \cdot)$, $\cdot$ značí násobení modulo 5
   c) $(\mathbb{Z}_{10}^*, \cdot)$, $\cdot$ značí násobení modulo 10
   d) $(\mathbb{Z}_{20}^*, \cdot)$, $\cdot$ značí násobení modulo 20
   e) $(\mathbb{P}_3, \circ)$

5. Rozhodněte, které z následujích grup jsou izomorfní a najděte příslušné izomorfismy.

   a) $(\mathbb{Z}_{20}^*, \cdot)$ a $(\mathbb{Z}_8, +)$
   b) $(\mathbb{Z}_4, +)$ a $(\mathbb{Z}_5^*, \cdot)$
   c) $(\mathbb{P}_3, \circ)$ a $(\mathbb{Z}_6, +)$
   d) $(\mathbb{Z}_7^*, \cdot)$ a $(\mathbb{Z}_6, +)$
   e) $(\mathbb{Z}_5^*, \cdot)$ a $(\mathbb{Z}_{10}^*, \cdot)$

6. Kolik prvků má grupa G, máli-li podgrupy velikosti 10, 12 a 15 a je-li její velikost $100 < \#G < 150$?

7. Najděte nejmenší grupu G s operací násobení matic, která obsahuje prvky $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
Je tato grupa Abelova? Je cyklická? Najděte řády všech jejích prvků a všechny její podgrupy.

Řešení

1. a) Abelova (komutativní) grupa
   b) není grupa
   c) není grupa
   d) Abelova (komutativní) grupa
   e) Abelova (komutativní) grupa
   f) nekomutativní grupa

2. a) řády jsou po řadě $1, 6, 3, 2, 3, 6$
   b) řády jsou po řadě $1, 4, 4, 2$
   c) řády jsou po řadě $1, 4, 4, 2$
   d) řády jsou po řadě $1, 4, 4, 2, 2, 4, 4, 2$
   e) řády jsou po řadě $1, 3, 6, 3, 6, 2$

3. a) je cyklická, generátor 1 nebo 5
   b) je cyklická, generátor $1, 2, 3$ nebo 4
   c) je cyklická, generátor 2 nebo 3
   d) je cyklická, generátor 3 nebo 7
   e) není cyklická
   f) není cyklická

4. a) všechny cyklické: $\{0\}, \{0, 3\}, \{0, 2, 4\}, \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
   b) všechny cyklické: $\{1\}, \{1, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}$
   c) všechny cyklické: $\{1\}, \{1, 9\}, \{1, 3, 7, 9\}$
   d) cyklické: $\{1\}, \{1, 9\}, \{1, 11\}, \{1, 19\}, \{1, 3, 7, 9\}, \{1, 9, 13, 17\}$
   necyklické: $\{1, 9, 11, 19\}, \{1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19\}$
   e) cyklické: $\{\mathrm{id}\}, \{\mathrm{id}, (1, 2)\}, \{\mathrm{id}, (1, 3)\}, \{\mathrm{id}, (2, 3)\}, \{\mathrm{id}, (1, 2, 3), (1, 3, 2)\}$
   necyklická: $\mathbb{P}_3 = \{\mathrm{id}, (1, 2), (1, 3), (2, 3), (1, 2, 3), (1, 3, 2)\}$

5. a) nejsou izomorfní
   b) izomorfismus např. $\varphi : 0 \to 1, 1 \to 2, 2 \to 4, 3 \to 3$
   c) nejsou izomorfní
   d) izomorfismus např. $\varphi : 1 \to 0, 2 \to 2, 3 \to 1, 4 \to 4, 5 \to 5, 6 \to 3$
   e) izomorfismus např. $\varphi : 1 \to 1, 2 \to 3, 3 \to 7, 4 \to 9$

6. $\mathrm{nsn}(10, 12, 15) = 60$; grupa má tedy 120 prvků

7. $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

G není cyklická ani Abelova (komutativní); řády prvků jsou po řadě: $1, 3, 3, 2, 2, 2$;

všechny podgrupy $\subsetneq G$ jsou cyklické: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$,

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \right\}$, $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$,

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$