Algebraické vlastnosti bází nestandardních numeračních systémů

Zuzana Masáková

Seminář kombinatorických a algebraických struktur

1. prosince 2009

Osnova

- Používané číselnětеoretické pojmy

Osnova

- Používané číselněteoretické pojmy
- Připomenutí Rényiho β-rozvojů.

Osnova

- Používané číselněteoretické pojmy
- Připomenutí Rényiho β-rozvojů.
- Definice
  - Parryho čísla – Parryho polynom
  - Perronova čísla
  - Pisotova a Salemova čísla

Osnova

- Používané číselněteoretické pojmy
- Připomenutí Rényiho β-rozvojů.
- Definice
  - Parryho čísla – Parryho polynom
  - Perronova čísla
  - Pisotova a Salemova čísla
- Výjimečnost β-soustav, když
  - β je Parryho číslo – kombinatorické vlastnosti
  - β je Pisotovo nebo Salemovo číslo – aritmetické vlastnosti

Osnova

- Používané číselněteoretické pojmy
- Připomenutí Rényiho β-rozvojů.
- Definice
  - Parryho čísla – Parryho polynom
  - Perronova čísla
  - Pisotova a Salemova čísla
- Výjimečnost β-soustav, když
  - β je Parryho číslo – kombinatorické vlastnosti
  - β je Pisotovo nebo Salemovo číslo – aritmetické vlastnosti
- Vztah Pisotova $\subset$ Parryho $\subset$ Perronova čísla

Osnova

- Používané číselněteoretické pojmy
- Připomenutí Rényiho β-rozvojů.
- Definice
  - Parryho čísla – Parryho polynom
  - Perronova čísla
  - Pisotova a Salemova čísla
- Výjimečnost β-soustav, když
  - β je Parryho číslo – kombinatorické vlastnosti
  - β je Pisotovo nebo Salemovo číslo – aritmetické vlastnosti
- Vztah Pisotova $\subset$ Parryho $\subset$ Perronova čísla
- Kořeny Parryho polynomu

Osnova

- Používané číselněteoretické pojmy
- Připomenutí Rényiho β-rozvojů.
- Definice
  - Parryho čísla – Parryho polynom
  - Perronova čísla
  - Pisotova a Salemova čísla
- Výjimečnost β-soustav, když
  - β je Parryho číslo – kombinatorické vlastnosti
  - β je Pisotovo nebo Salemovo číslo – aritmetické vlastnosti
- Vztah Pisotova $\subset$ Parryho $\subset$ Perronova čísla
- Kořeny Parryho polynomu
- Analogie pro Itovy-Sadahirovy $(-\beta)$-rozvoje?

Pojmy I

Nechť $\beta \in \mathbb{C}$.

$\exists\, f \in \mathbb{Q}[x]$ monický, $f(\beta) = 0$ $\quad\longrightarrow\quad$ β algebraické číslo

Pojmy I

Nechť $\beta \in \mathbb{C}$.

$\exists\, f \in \mathbb{Q}[x]$ monický, $f(\beta) = 0 \quad \longrightarrow \quad \beta$ algebraické číslo

$\exists\, f \in \mathbb{Z}[x]$ monický, $f(\beta) = 0 \quad \longrightarrow \quad \beta$ algebraické celé číslo

Pojmy I

Nechť $\beta \in \mathbb{C}$.

$\exists\, f \in \mathbb{Q}[x]$ monický, $f(\beta) = 0$	$\longrightarrow$	β algebraické číslo
$\exists\, f \in \mathbb{Z}[x]$ monický, $f(\beta) = 0$	$\longrightarrow$	β algebraické celé číslo
f min. stupně mezi všemi $\uparrow$	$\longrightarrow$	minimální polynom čísla β

Pojmy I

Nechť $\beta \in \mathbb{C}$.

$\exists\, f \in \mathbb{Q}[x]$ monický, $f(\beta) = 0$	$\longrightarrow$	β algebraické číslo
$\exists\, f \in \mathbb{Z}[x]$ monický, $f(\beta) = 0$	$\longrightarrow$	β algebraické celé číslo
f min. stupně mezi všemi $\uparrow$	$\longrightarrow$	minimální polynom čísla β
stupeň minimálního polynomu	$\longrightarrow$	stupeň čísla β

Pojmy I

Nechť $\beta \in \mathbb{C}$.

$\exists\, f \in \mathbb{Q}[x]$ monický, $f(\beta) = 0$	$\longrightarrow$	β algebraické číslo
$\exists\, f \in \mathbb{Z}[x]$ monický, $f(\beta) = 0$	$\longrightarrow$	β algebraické celé číslo
f min. stupně mezi všemi $\uparrow$	$\longrightarrow$	minimální polynom čísla β
stupeň minimálního polynomu	$\longrightarrow$	stupeň čísla β

Minimální polynom

$$f(x) = x^d + \sum_{i=0}^{d-1} a_i x^i = \prod_{j=1}^{d} (x - \beta^{(j)})$$

je ireducibilní $\quad \Rightarrow \quad \beta^{(1)} = \beta,\ \beta^{(2)},\ \ldots,\ \beta^{(d)} \in \mathbb{C}$ jsou různé.

$\longrightarrow$ sdružené kořeny

Pojmy II

Minimální těleso obsahující $\mathbb{Q}$ a β

$$\mathbb{Q}(\beta) = \{a_0 + a_1\beta + \cdots + a_{d-1}\beta^{d-1} \mid a_i \in \mathbb{Q}\}\,.$$

Pojmy II

Minimální těleso obsahující $\mathbb{Q}$ a β

$$\mathbb{Q}(\beta) = \{a_0 + a_1\beta + \cdots + a_{d-1}\beta^{d-1} \mid a_i \in \mathbb{Q}\}\,.$$

Izomorfizmus $\mathbb{Q}(\beta) \mapsto \mathbb{Q}\big(\beta^{(i)}\big)$:

$$x = a_0 + a_1\beta + \cdots + a_{d-1}\beta^{d-1}$$
$$\downarrow$$
$$x^{(i)} = a_0 + a_1\beta^{(i)} + \cdots + a_{d-1}\big(\beta^{(i)}\big)^{d-1}$$

je identický na $\mathbb{Q}$.

Pojmy II

Minimální těleso obsahující $\mathbb{Q}$ a β

$$\mathbb{Q}(\beta) = \{a_0 + a_1\beta + \cdots + a_{d-1}\beta^{d-1} \mid a_i \in \mathbb{Q}\}\,.$$

Izomorfizmus $\mathbb{Q}(\beta) \mapsto \mathbb{Q}\big(\beta^{(i)}\big)$:

$$\begin{gathered} x = a_0 + a_1\beta + \cdots + a_{d-1}\beta^{d-1} \\ \downarrow \\ x^{(i)} = a_0 + a_1\beta^{(i)} + \cdots + a_{d-1}\big(\beta^{(i)}\big)^{d-1} \end{gathered}$$

je identický na $\mathbb{Q}$.

Je-li $x \in \mathbb{Q}(\beta)$ a g polynom s racionálními koeficienty, pak

$$g(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad g(x^{(i)}) = 0\,.$$

O Rényiho β-rozvojích

Pro $\beta > 1$ máme β-transformaci

$$T_\beta : [0,1) \mapsto [0,1)\,, \qquad T_\beta(x) = \beta x - \lfloor \beta x \rfloor\,.$$

Pro $x \in [0,1)$ definujeme cifry a_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$, kde

$$a_i = \lfloor \beta T_\beta^{(i-1)}(x) \rfloor \in \{0, 1, \ldots, \lfloor \beta \rfloor\}\,.$$

Pak $\quad d(\beta, x) = a_1 a_2 a_3 \cdots, \quad$ tj. $\quad x = \frac{a_1}{\beta} + \frac{a_2}{\beta^2} + \frac{a_3}{\beta^3} + \cdots\,.$

O Rényiho β-rozvojích

Pro $\beta > 1$ máme β-transformaci

$$T_\beta : [0,1) \mapsto [0,1)\,, \qquad T_\beta(x) = \beta x - \lfloor \beta x \rfloor\,.$$

Pro $x \in [0,1)$ definujeme cifry a_i, $i = 1,2,3,\ldots$, kde

$$a_i = \lfloor \beta T_\beta^{(i-1)}(x) \rfloor \in \{0,1,\ldots,\lfloor \beta \rfloor\}\,.$$

Pak $\quad d(\beta,x) = a_1 a_2 a_3 \cdots$, $\quad$ tj. $\quad x = \frac{a_1}{\beta} + \frac{a_2}{\beta^2} + \frac{a_3}{\beta^3} + \cdots$.

Řetězec cifer $a_1 a_2 a_3 \cdots$ je přípustný, právě když pro $i = 1,2,3,\ldots$

$$0^\omega \preceq_{\mathrm{lex}} a_i a_{i+1} a_{i+2} \cdots \prec_{\mathrm{lex}} d^*(\beta,1) = \lim_{\varepsilon \to 0+} d(\beta, 1-\varepsilon)\,.$$

O Rényiho β-rozvojích

Pro $\beta > 1$ máme β-transformaci

$$T_\beta : [0,1) \mapsto [0,1)\,, \qquad T_\beta(x) = \beta x - \lfloor \beta x \rfloor\,.$$

Pro $x \in [0,1)$ definujeme cifry a_i, $i = 1,2,3,\ldots$, kde

$$a_i = \lfloor \beta T_\beta^{(i-1)}(x) \rfloor \in \{0,1,\ldots,\lfloor \beta \rfloor\}\,.$$

Pak $\quad d(\beta, x) = a_1 a_2 a_3 \cdots\,, \quad$ tj. $\quad x = \frac{a_1}{\beta} + \frac{a_2}{\beta^2} + \frac{a_3}{\beta^3} + \cdots\,.$

Řetězec cifer $a_1 a_2 a_3 \cdots$ je přípustný, právě když pro $i = 1,2,3,\ldots$

$$0^\omega \ \preceq_{\text{lex}} \ a_i a_{i+1} a_{i+2} \cdots \ \prec_{\text{lex}} \ d^*(\beta,1) = \lim_{\varepsilon \to 0+} d(\beta, 1-\varepsilon)\,.$$

Rényiho rozvoj jedničky: $d(\beta,1) = t_1 t_2 t_3 \cdots$,

kde $t_i = \lfloor \beta T^{(i-1)}(1) \rfloor$, $i \geq 1$.

Parryho čísla

Posléze periodický Rényiho rozvoj jedničky:

$d(\beta, 1) = t_1 \cdots t_m 0^\omega = t_1 \cdots t_m$, $t_m \neq 0$

jednoduchá Parryho čísla

Parryho čísla

Posléze periodický Rényiho rozvoj jedničky:

$d(\beta, 1) = t_1 \cdots t_m 0^\omega = t_1 \cdots t_m$, $t_m \neq 0$

jednoduchá Parryho čísla

$d(\beta, 1) = t_1 \cdots t_m (t_{m+1} \cdots t_{m+p})^\omega$, $t_m \neq t_{m+p}$

nejednoduchá Parryho čísla

Parryho čísla

Posléze periodický Rényiho rozvoj jedničky:

$$d(\beta, 1) = t_1 \cdots t_m 0^\omega = t_1 \cdots t_m,\ t_m \neq 0$$

jednoduchá Parryho čísla

$$d(\beta, 1) = t_1 \cdots t_m (t_{m+1} \cdots t_{m+p})^\omega,\ t_m \neq t_{m+p}$$

nejednoduchá Parryho čísla

Pro β Parryho číslo:

Parryho čísla

Posléze periodický Rényiho rozvoj jedničky:

$d(\beta, 1) = t_1 \cdots t_m 0^\omega = t_1 \cdots t_m$, $t_m \neq 0$

jednoduchá Parryho čísla

$d(\beta, 1) = t_1 \cdots t_m (t_{m+1} \cdots t_{m+p})^\omega$, $t_m \neq t_{m+p}$

nejednoduchá Parryho čísla

Pro β Parryho číslo:

- Dynamický systém $([0,1), T_\beta)$ je “sofic”.

Parryho čísla

Posléze periodický Rényiho rozvoj jedničky:

$$d(\beta, 1) = t_1 \cdots t_m 0^\omega = t_1 \cdots t_m,\ t_m \neq 0$$

jednoduchá Parryho čísla

$$d(\beta, 1) = t_1 \cdots t_m (t_{m+1} \cdots t_{m+p})^\omega,\ t_m \neq t_{m+p}$$

nejednoduchá Parryho čísla

Pro β Parryho číslo:

- Dynamický systém $([0, 1), T_\beta)$ je "sofic".
- V množině β-celých čísel je konečný počet mezer mezi sousedy.

Parryho čísla

Posléze periodický Rényiho rozvoj jedničky:

$d(\beta, 1) = t_1 \cdots t_m 0^\omega = t_1 \cdots t_m$, $t_m \neq 0$

jednoduchá Parryho čísla

$d(\beta, 1) = t_1 \cdots t_m (t_{m+1} \cdots t_{m+p})^\omega$, $t_m \neq t_{m+p}$

nejednoduchá Parryho čísla

Pro β Parryho číslo:

- Dynamický systém $([0,1), T_\beta)$ je "sofic".
- V množině β-celých čísel je konečný počet mezer mezi sousedy.
- $\mathbb{Z}_\beta$ je kódováno nekonečným slovem u_β v konečné abecedě.

Parryho čísla

Posléze periodický Rényiho rozvoj jedničky:

$d(\beta, 1) = t_1 \cdots t_m 0^\omega = t_1 \cdots t_m$, $t_m \neq 0$

jednoduchá Parryho čísla

$d(\beta, 1) = t_1 \cdots t_m (t_{m+1} \cdots t_{m+p})^\omega$, $t_m \neq t_{m+p}$

nejednoduchá Parryho čísla

Pro β Parryho číslo:

- Dynamický systém $([0, 1), T_\beta)$ je "sofic".
- V množině β-celých čísel je konečný počet mezer mezi sousedy.
- $\mathbb{Z}_\beta$ je kódováno nekonečným slovem u_β v konečné abecedě.
- u_β je invariantní na substituci a má spoustu dalších zajímavých vlastností.

Parryho polynom

Je-li $d(\beta, 1) = t_1 \cdots t_m$, pak

$$P(\beta) = \beta^m - t_1\beta^{m-1} - \cdots - t_{m-1}\beta - t_m = 0$$

Parryho polynom

Je-li $d(\beta, 1) = t_1 \cdots t_m$, pak

$$P(\beta) = \beta^m - t_1\beta^{m-1} - \cdots - t_{m-1}\beta - t_m = 0$$

Je-li $d(\beta, 1) = t_1 \cdots t_m(t_{m+1} \cdots t_{m+p})^\omega$, pak

$$\begin{aligned} P(\beta) = \beta^{m+p} - t_1\beta^{m+p-1} - \cdots - t_{m+p-1}\beta - t_{m+p} - \\ -(\beta^m - t_1\beta^{m-1} - \cdots - t_{m-1}\beta - t_m) = 0 \end{aligned}$$

P je tzv. Parryho polynom

Parryho polynom

Je-li $d(\beta, 1) = t_1 \cdots t_m$, pak

$$P(\beta) = \beta^m - t_1\beta^{m-1} - \cdots - t_{m-1}\beta - t_m = 0$$

Je-li $d(\beta, 1) = t_1 \cdots t_m (t_{m+1} \cdots t_{m+p})^\omega$, pak

$$\begin{aligned} P(\beta) = \beta^{m+p} - t_1\beta^{m+p-1} - \cdots - t_{m+p-1}\beta - t_{m+p} - \\ -(\beta^m - t_1\beta^{m-1} - \cdots - t_{m-1}\beta - t_m) = 0 \end{aligned}$$

P je tzv. Parryho polynom

P je monický v $\mathbb{Z}[x]$ $\quad\Rightarrow\quad$ Parryho číslo β je algebraické celé.

Parryho polynom

Je-li $d(\beta,1) = t_1 \cdots t_m$, pak

$$P(\beta) = \beta^m - t_1\beta^{m-1} - \cdots - t_{m-1}\beta - t_m = 0$$

Je-li $d(\beta,1) = t_1 \cdots t_m(t_{m+1} \cdots t_{m+p})^\omega$, pak

$$\begin{aligned} P(\beta) = \beta^{m+p} - t_1\beta^{m+p-1} - \cdots - t_{m+p-1}\beta - t_{m+p} - \\ -(\beta^m - t_1\beta^{m-1} - \cdots - t_{m-1}\beta - t_m) = 0 \end{aligned}$$

P je tzv. Parryho polynom

P je monický v $\mathbb{Z}[x]$ $\Rightarrow$ Parryho číslo β je algebraické celé.

P není nutně ireducibilní,

$m \geq d$ (resp. $m + p \geq d$), kde d je stupeň čísla β.

Perronova čísla

Algebraické celé číslo β, jehož sdružené kořeny splňují $|\beta^{(i)}| < \beta$,

Perronovo číslo

Perronova čísla

Algebraické celé číslo β, jehož sdružené kořeny splňují $|\beta^{(i)}| < \beta$,

Perronovo číslo

Parryho číslo β je vlastní číslo matice

$$M_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ t_m & t_{m-1} & t_{m-2} & \cdots & t_2 & t_1 \end{pmatrix},$$

Ta má nezáporné koeficienty a je nerozložitelná,

tj. z Perron-Frobeniovy věty jsou ostatní vlastní čísla $|\beta^{(i)}| < \beta$.

Pisotova a Salemova čísla

$\beta > 1$ algebraické celé stupně d je

Pisotovo číslo, když jeho sdružené kořeny splňují

$$|\beta^{(i)}| < 1\,, \quad i = 2, \ldots, d\,.$$

Pisotova a Salemova čísla

$\beta > 1$ algebraické celé stupně d je

Pisotovo číslo, když jeho sdružené kořeny splňují

$$|\beta^{(i)}| < 1\,, \quad i = 2, \dots, d\,.$$

Salemovo číslo, když

$$|\beta^{(i)}| \leq 1\,, \quad i = 2, \dots, d\,,$$

a alespoň v jednom případě nastává rovnost.

Vlastnosti Salemova čísla $\beta > 1$

Je-li f minimální polynom

$$f(x) = x^d + \sum_{i=1}^{d-1} c_i x^i + c_0\,, \qquad c_i \in \mathbb{Z}$$

a α je kořen f takový, že $|\alpha| = 1$, pak i $\overline{\alpha} = \alpha^{-1}$ je kořen f.

Vlastnosti Salemova čísla $\beta > 1$

Je-li f minimální polynom

$$f(x) = x^d + \sum_{i=1}^{d-1} c_i x^i + c_0\,, \qquad c_i \in \mathbb{Z}$$

a α je kořen f takový, že $|\alpha| = 1$, pak i $\overline{\alpha} = \alpha^{-1}$ je kořen f.
Ale minimální polynom α^{-1} je

$$g(x) = x^d + \sum_{i=1}^{d-1} \frac{c_{d-i}}{c_0} x^i + \frac{1}{c_0}\,.$$

Protože $f = g$, je

- $c_0 = 1$ a β je algebraická jednotka,
- f je reciproký polynom, proto $f(\gamma) = 0 \;\Rightarrow\; f(\gamma^{-1}) = 0$.

Vlastnosti Salemova čísla $\beta > 1$

Je-li f minimální polynom

$$f(x) = x^d + \sum_{i=1}^{d-1} c_i x^i + c_0 \,, \qquad c_i \in \mathbb{Z}$$

a α je kořen f takový, že $|\alpha| = 1$, pak i $\overline{\alpha} = \alpha^{-1}$ je kořen f.
Ale minimální polynom α^{-1} je

$$g(x) = x^d + \sum_{i=1}^{d-1} \frac{c_{d-i}}{c_0} x^i + \frac{1}{c_0} \,.$$

Protože $f = g$, je

- $c_0 = 1$ a β je algebraická jednotka,
- f je reciproký polynom, proto $f(\gamma) = 0 \;\Rightarrow\; f(\gamma^{-1}) = 0$.

$\Rightarrow$ Jediné kořeny v $\mathbb{R}$ jsou β a β^{-1}, ostatní $|\gamma| = 1$ a d je sudé.

Aritmetika v β-soustavách

Označme $\mathrm{Per}(\beta)$ množinu čísel s periodickým β-rozvojem.

Pro bázi $\beta \in \mathbb{N}$ platí $\mathrm{Per}(\beta) = \mathbb{Q} = \mathbb{Q}(\beta)$.

Aritmetika v β-soustavách

Označme $\mathrm{Per}(\beta)$ množinu čísel s periodickým β-rozvojem.

Pro bázi $\beta \in \mathbb{N}$ platí $\mathrm{Per}(\beta) = \mathbb{Q} = \mathbb{Q}(\beta)$.

Pro bázi $\beta \notin \mathbb{N}$ platí $\mathrm{Per}(\beta) \subset \mathbb{Q}(\beta)$. Pro která β platí rovnost?

Aritmetika v β-soustavách

Označme $\mathrm{Per}(\beta)$ množinu čísel s periodickým β-rozvojem.

Pro bázi $\beta \in \mathbb{N}$ platí $\mathrm{Per}(\beta) = \mathbb{Q} = \mathbb{Q}(\beta)$.

Pro bázi $\beta \notin \mathbb{N}$ platí $\mathrm{Per}(\beta) \subset \mathbb{Q}(\beta)$. Pro která β platí rovnost?

Theorem (Schmidt) :

$\mathrm{Per}(\beta) = \mathbb{Q}(\beta) \implies$ β je Pisotovo nebo Salemovo.

β je Pisotovo $\implies \mathrm{Per}(\beta) = \mathbb{Q}(\beta)$.

Aritmetika v β-soustavách

Označme $\mathrm{Per}(\beta)$ množinu čísel s periodickým β-rozvojem.

Pro bázi $\beta \in \mathbb{N}$ platí $\mathrm{Per}(\beta) = \mathbb{Q} = \mathbb{Q}(\beta)$.

Pro bázi $\beta \notin \mathbb{N}$ platí $\mathrm{Per}(\beta) \subset \mathbb{Q}(\beta)$. Pro která β platí rovnost?

Theorem (Schmidt) :

$\mathrm{Per}(\beta) = \mathbb{Q}(\beta) \implies \beta$ je Pisotovo nebo Salemovo.

β je Pisotovo $\implies \mathrm{Per}(\beta) = \mathbb{Q}(\beta)$.

Otázka: Je $\mathrm{Per}(\beta) = \mathbb{Q}(\beta)$ pro všechna Salemova čísla?

Pro β stupně 4 ano.

Důkaz $\mathbb{Q}(\beta) \subset \mathrm{Per}(\beta) \ \Rightarrow\ \beta$ Pisot nebo Salem:

Pro libovolné $m \in \mathbb{N}$ jistě existuje $\alpha \in \mathbb{Q}$ s rozvojem

$$\alpha = \beta^{-1} + \sum_{j=m+1}^{\infty} x_j \beta^{-j}\,.$$

Důkaz $\mathbb{Q}(\beta) \subset \mathrm{Per}(\beta) \;\Rightarrow\; \beta$ Pisot nebo Salem:

Pro libovolné $m \in \mathbb{N}$ jistě existuje $\alpha \in \mathbb{Q}$ s rozvojem

$$\alpha = \beta^{-1} + \sum_{j=m+1}^{\infty} x_j \beta^{-j}\,.$$

Je-li γ sdružený kořen k β, $|\gamma| > 1$, pak

$$\alpha = \beta^{-1} + \sum_{j=m+1}^{\infty} x_j \beta^{-j} = \gamma^{-1} + \sum_{j=m+1}^{\infty} x_j \gamma^{-j}\,.$$

Pozor! Pro rovnost je třeba periodicita rozvoje!

Důkaz $\mathbb{Q}(\beta) \subset \mathrm{Per}(\beta) \ \Rightarrow\ \beta$ Pisot nebo Salem:

Pro libovolné $m \in \mathbb{N}$ jistě existuje $\alpha \in \mathbb{Q}$ s rozvojem

$$\alpha = \beta^{-1} + \sum_{j=m+1}^{\infty} x_j \beta^{-j}\,.$$

Je-li γ sdružený kořen k β, $|\gamma| > 1$, pak

$$\alpha = \beta^{-1} + \sum_{j=m+1}^{\infty} x_j \beta^{-j} = \gamma^{-1} + \sum_{j=m+1}^{\infty} x_j \gamma^{-j}\,.$$

Pozor! Pro rovnost je třeba periodicita rozvoje! Pak

$$|\beta^{-1} - \gamma^{-1}| \le \sum_{j=m+1} x_j |\beta^{-j} - \gamma^{-j}| \le 2 \sum_{j=m+1} x_j \eta^j\,,$$

kde $\eta = \max\{|\beta|^{-1}, |\gamma|^{-1}\}$.

Vhodná volba m (a tedy α) vede ke sporu.

Důkaz β Pisot $\Rightarrow$ $\mathbb{Q}(\beta) \subset \mathrm{Per}(\beta)$:

$\alpha \in \mathbb{Q}(\beta)$ s rozvojem $\alpha = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \beta^{-j}$ lze zapsat

$$\alpha = \frac{1}{q}\big(c_0 + c_1\beta + \cdots + c_{d-1}\beta^{d-1}\big)\,,$$

kde $q \in \mathbb{N}$ minimální a $c_0, \ldots, c_{d-1} \in \mathbb{Z}$.

Důkaz β Pisot $\Rightarrow$ $\mathbb{Q}(\beta) \subset \mathrm{Per}(\beta)$:

$\alpha \in \mathbb{Q}(\beta)$ s rozvojem $\alpha = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \beta^{-j}$ lze zapsat

$$\alpha = \frac{1}{q}\left(c_0 + c_1\beta + \cdots + c_{d-1}\beta^{d-1}\right),$$

kde $q \in \mathbb{N}$ minimální a $c_0, \ldots, c_{d-1} \in \mathbb{Z}$. Snadno

$$T^{(n)}(\alpha) = \frac{1}{q}\left(c_0^{(n)} + c_1^{(n)}\beta + \cdots + c_{d-1}^{(n)}\beta^{d-1}\right).$$

Přitom

$$T^{(n)}(\alpha) = \sum_{j=n+1}^{\infty} x_j \beta^{-j} = \beta^n\Big(\alpha - \sum_{j=1}^{n} x_j \beta^{-j}\Big).$$

Důkaz β Pisot $\Rightarrow$ $\mathbb{Q}(\beta) \subset \mathrm{Per}(\beta)$:

$\alpha \in \mathbb{Q}(\beta)$ s rozvojem $\alpha = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \beta^{-j}$ lze zapsat

$$\alpha = \frac{1}{q}\left(c_0 + c_1\beta + \cdots + c_{d-1}\beta^{d-1}\right),$$

kde $q \in \mathbb{N}$ minimální a $c_0, \ldots, c_{d-1} \in \mathbb{Z}$. Polynomiální rovnici

$$\beta^n\Big(\alpha - \sum_{j=1}^{n} x_j \beta^{-j}\Big) = \frac{1}{q}\left(c_0^{(n)} + c_1^{(n)}\beta + \cdots + c_{d-1}^{(n)}\beta^{d-1}\right)$$

splňují všechny sdružené kořeny k β:

$$\gamma^n\Big(\alpha^{(\gamma)} - \sum_{j=1}^{n} x_j \gamma^{-j}\Big) = \frac{1}{q}\left(c_0^{(n)} + c_1^{(n)}\gamma + \cdots + c_{d-1}^{(n)}\gamma^{d-1}\right)$$

Důkaz β Pisot $\Rightarrow$ $\mathbb{Q}(\beta) \subset \mathrm{Per}(\beta)$:

$\alpha \in \mathbb{Q}(\beta)$ s rozvojem $\alpha = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \beta^{-j}$ lze zapsat

$$\alpha = \frac{1}{q}\big(c_0 + c_1\beta + \cdots + c_{d-1}\beta^{d-1}\big)\,,$$

kde $q \in \mathbb{N}$ minimální a $c_0, \ldots, c_{d-1} \in \mathbb{Z}$. Polynomiální rovnici

$$\beta^n\Big(\alpha - \sum_{j=1}^{n} x_j\beta^{-j}\Big) = \frac{1}{q}\big(c_0^{(n)} + c_1^{(n)}\beta + \cdots + c_{d-1}^{(n)}\beta^{d-1}\big)$$

splňují všechny sdružené kořeny k β:

$$\gamma^n\Big(\alpha^{(\gamma)} - \sum_{j=1}^{n} x_j\gamma^{-j}\Big) = \frac{1}{q}\big(c_0^{(n)} + c_1^{(n)}\gamma + \cdots + c_{d-1}^{(n)}\gamma^{d-1}\big)$$

$|\gamma| < 1 \quad \Rightarrow \quad c_i^{(n)}$ omezené v $n \quad \Rightarrow \quad T^{(n)}(\alpha)$ se zacyklí.

Vlastnost F

Označme $\mathrm{Fin}(\beta)$ množinu čísel s konečným β-rozvojem.

Vlastnost F

Označme $\mathrm{Fin}(\beta)$ množinu čísel s konečným β-rozvojem.

Theorem (Frougny & Solomyak) :

$$\mathrm{Fin}(\beta) \text{ je okruh} \quad \Longrightarrow \quad \beta \text{ je Pisotovo číslo.}$$

Vlastnost F

Označme $\mathrm{Fin}(\beta)$ množinu čísel s konečným β-rozvojem.

Theorem (Frougny & Solomyak) :

$$\mathrm{Fin}(\beta) \text{ je okruh} \quad \Longrightarrow \quad \beta \text{ je Pisotovo číslo.}$$

Naopak neplatí.

Např. β se sdruženým kořenem $\beta^{(i)} \in (0,1)$ nemůže být jednoduché Parryho, protože

$$d(\beta,1) = t_1 \cdots t_m \quad \Rightarrow \quad 1 = \frac{t_1}{\beta^{(i)}} + \cdots + \frac{t_m}{(\beta^{(i)})^m} > t_1 \geq 1$$

Pak ale
$$\beta - t_1 = \frac{t_2}{\beta} + \frac{t_3}{\beta^2} + \cdots \notin \mathrm{Fin}(\beta)\,.$$

Vlastnost F

Označme $\mathrm{Fin}(\beta)$ množinu čísel s konečným β-rozvojem.

Theorem (Frougny & Solomyak) :

$$\mathrm{Fin}(\beta) \text{ je okruh} \quad \Longrightarrow \quad \beta \text{ je Pisotovo číslo.}$$

Naopak neplatí.

Např. β se sdruženým kořenem $\beta^{(i)} \in (0,1)$ nemůže být jednoduché Parryho, protože

$$d(\beta,1) = t_1 \cdots t_m \quad \Rightarrow \quad 1 = \frac{t_1}{\beta^{(i)}} + \cdots + \frac{t_m}{(\beta^{(i)})^m} > t_1 \geq 1$$

Pak ale $\qquad \beta - t_1 = \dfrac{t_2}{\beta} + \dfrac{t_3}{\beta^2} + \cdots \notin \mathrm{Fin}(\beta)\,.$

Otázka: Algebraická charakterizace čísel s vlastností F.

Sdružené kořeny Parryho čísel

Využijeme

$$t_i = \lfloor \beta T^{(i-1)}(1) \rfloor = \beta T^{(i-1)}(1) - \left(\beta T^{(i-1)}(1) - \lfloor \beta T^{(i-1)}(1) \rfloor \right)$$

Sdružené kořeny Parryho čísel

Využijeme

$$t_i = \lfloor \beta T^{(i-1)}(1) \rfloor = \beta T^{(i-1)}(1) - T^{(i)}(1).$$

Sdružené kořeny Parryho čísel

Využijeme

$$t_i = \lfloor \beta T^{(i-1)}(1) \rfloor = \beta T^{(i-1)}(1) - T^{(i)}(1).$$

Navíc je-li $d(\beta, 1) = t_1 \cdots t_m$, pak $T^m(1) = 0$.

Sdružené kořeny Parryho čísel

Využijeme

$$t_i = \lfloor \beta T^{(i-1)}(1) \rfloor = \beta T^{(i-1)}(1) - T^{(i)}(1).$$

Navíc je-li $d(\beta, 1) = t_1 \cdots t_m$, pak $T^m(1) = 0$.

Upravíme Parryho polynom čísla β:

$$P(x) = x^m - t_1 x^{m-1} - t_2 x^{m-2} - \cdots - t_{m-1} x - t_m =$$

Sdružené kořeny Parryho čísel

Využijeme

$$t_i = \lfloor \beta T^{(i-1)}(1) \rfloor = \beta T^{(i-1)}(1) - T^{(i)}(1).$$

Navíc je-li $d(\beta, 1) = t_1 \cdots t_m$, pak $T^m(1) = 0$.

Upravíme Parryho polynom čísla β:

$$\begin{aligned} P(x) &= x^m - t_1 x^{m-1} - t_2 x^{m-2} - \cdots - t_{m-1} x - t_m = \\ &= x^m - \big(\beta - T(1)\big) x^{m-1} - \cdots - \big(\beta T^{(m-1)}(1) - T^{(m)}(1)\big) = \end{aligned}$$

Sdružené kořeny Parryho čísel

Využijeme

$$t_i = \lfloor \beta T^{(i-1)}(1) \rfloor = \beta T^{(i-1)}(1) - T^{(i)}(1).$$

Navíc je-li $d(\beta, 1) = t_1 \cdots t_m$, pak $T^m(1) = 0$.

Upravíme Parryho polynom čísla β:

$$\begin{aligned}
P(x) &= x^m - t_1 x^{m-1} - t_2 x^{m-2} - \cdots - t_{m-1}x - t_m = \\
&= x^m - \big(\beta - T(1)\big)x^{m-1} - \cdots - \big(\beta T^{(m-1)}(1) - T^{(m)}(1)\big) = \\
&= x\Big(x^{m-1} + T(1)x^{m-2} + \cdots + T^{m-1}(1)\Big) + T^m(1) + \\
&\qquad - \beta\Big(x^{m-1} + T(1)x^{m-2} + \cdots + T^{m-1}(1)\Big) =
\end{aligned}$$

Sdružené kořeny Parryho čísel

Využijeme

$$t_i = \lfloor \beta T^{(i-1)}(1) \rfloor = \beta T^{(i-1)}(1) - T^{(i)}(1).$$

Navíc je-li $d(\beta, 1) = t_1 \cdots t_m$, pak $T^m(1) = 0$.

Upravíme Parryho polynom čísla β:

$$\begin{aligned}
P(x) &= x^m - t_1 x^{m-1} - t_2 x^{m-2} - \cdots - t_{m-1} x - t_m = \\
&= x^m - \big(\beta - T(1)\big) x^{m-1} - \cdots - \big(\beta T^{(m-1)}(1) - T^{(m)}(1)\big) = \\
&= x\Big(x^{m-1} + T(1)x^{m-2} + \cdots + T^{m-1}(1)\Big) + T^m(1) + \\
&\qquad - \beta\Big(x^{m-1} + T(1)x^{m-2} + \cdots + T^{m-1}(1)\Big) = \\
&= (x - \beta)\Big(x^{m-1} + T(1)x^{m-2} + \cdots + T^{m-1}(1)\Big).
\end{aligned}$$

Sdružené kořeny Parryho čísel

Všechny kořeny $\gamma \neq \beta$ Parryho polynomu P tedy splňují

$$\gamma^{m-1} + T(1)\gamma^{m-2} + \cdots + T^{m-2}\gamma + T^{m-1}(1) = 0\,.$$

Sdružené kořeny Parryho čísel

Všechny kořeny $\gamma \neq \beta$ Parryho polynomu P tedy splňují

$$\gamma^{m-1} + T(1)\gamma^{m-2} + \cdots + T^{m-2}\gamma + T^{m-1}(1) = 0\,.$$

Je-li $|\gamma| > 1$, pak

$$\begin{aligned}|\gamma^{m-1}| = |\,T(1)\gamma^{m-2} + \cdots + T^{m-2}\gamma + T^{m-1}(1)| \leq \\ \leq |\gamma|^{m-2} + \cdots + |\gamma| + 1 = \frac{|\gamma|^{m-1} - 1}{|\gamma| - 1} < \frac{|\gamma|^{m-1}}{|\gamma| - 1}\,,\end{aligned}$$

Sdružené kořeny Parryho čísel

Všechny kořeny $\gamma \neq \beta$ Parryho polynomu P tedy splňují

$$\gamma^{m-1} + T(1)\gamma^{m-2} + \cdots + T^{m-2}\gamma + T^{m-1}(1) = 0\,.$$

Je-li $|\gamma| > 1$, pak

$$\begin{aligned} |\gamma^{m-1}| &= |\,T(1)\gamma^{m-2} + \cdots + T^{m-2}\gamma + T^{m-1}(1)| \leq \\ &\leq |\gamma|^{m-2} + \cdots + |\gamma| + 1 = \frac{|\gamma|^{m-1} - 1}{|\gamma| - 1} < \frac{|\gamma|^{m-1}}{|\gamma| - 1}\,, \end{aligned}$$

a proto $|\gamma| < 2$.

Sdružené kořeny Parryho čísel

Všechny kořeny $\gamma \neq \beta$ Parryho polynomu P tedy splňují

$$\gamma^{m-1} + T(1)\gamma^{m-2} + \cdots + T^{m-2}\gamma + T^{m-1}(1) = 0\,.$$

Je-li $|\gamma| > 1$, pak

$$\begin{aligned} |\gamma^{m-1}| &= |\,T(1)\gamma^{m-2} + \cdots + T^{m-2}\gamma + T^{m-1}(1)| \leq \\ &\leq |\gamma|^{m-2} + \cdots + |\gamma| + 1 = \frac{|\gamma|^{m-1} - 1}{|\gamma| - 1} < \frac{|\gamma|^{m-1}}{|\gamma| - 1}\,, \end{aligned}$$

a proto $\quad |\gamma| < 2$.

Při jemnějším odhadu $|\,T^{(i)}(1) - \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{2}$ vyjde $|\gamma| < \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$.

Sdružené kořeny Parryho čísel

Všechny kořeny $\gamma \neq \beta$ Parryho polynomu P tedy splňují

$$\gamma^{m-1} + T(1)\gamma^{m-2} + \cdots + T^{m-2}\gamma + T^{m-1}(1) = 0\,.$$

Je-li $|\gamma| > 1$, pak

$$\begin{aligned} |\gamma^{m-1}| &= |\,T(1)\gamma^{m-2} + \cdots + T^{m-2}\gamma + T^{m-1}(1)| \leq \\ &\leq |\gamma|^{m-2} + \cdots + |\gamma| + 1 = \frac{|\gamma|^{m-1} - 1}{|\gamma| - 1} < \frac{|\gamma|^{m-1}}{|\gamma| - 1}\,, \end{aligned}$$

a proto $\quad |\gamma| < 2$.

Při jemnějším odhadu $|\,T^{(i)}(1) - \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{2}$ vyjde $|\gamma| < \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$.

Detailnější popis množiny sdružených kořenů všech Parryho čísel podal Solomyak.

Sdružené kořeny Parryho čísel

Všechny kořeny $\gamma \neq \beta$ Parryho polynomu P tedy splňují

$$\gamma^{m-1} + T(1)\gamma^{m-2} + \cdots + T^{m-2}\gamma + T^{m-1}(1) = 0\,.$$

Je-li $|\gamma| > 1$, pak

$$\begin{aligned}|\gamma^{m-1}| &= |\,T(1)\gamma^{m-2} + \cdots + T^{m-2}\gamma + T^{m-1}(1)| \leq \\ &\leq |\gamma|^{m-2} + \cdots + |\gamma| + 1 = \frac{|\gamma|^{m-1} - 1}{|\gamma| - 1} < \frac{|\gamma|^{m-1}}{|\gamma| - 1}\,,\end{aligned}$$

a proto $\quad |\gamma| < 2$.

Při jemnějším odhadu $|\,T^{(i)}(1) - \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{2}$ vyjde $|\gamma| < \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$.

Detailnější popis množiny sdružených kořenů všech Parryho čísel podal Solomyak.

Podobně pro nejednoduché Parryho číslo.

Kvadratická Parryho čísla

Je-li P Parryho polynom a f minimální polynom čísla β, pak

$$P(x) = f(x)Q(x)\,, \qquad \text{kde} \;\; Q \in \mathbb{Z}[x]$$

Odtud $P(0) = f(0)Q(0)$, a proto $|f(0)| \le |P(0)|$.

Kvadratická Parryho čísla

Je-li P Parryho polynom a f minimální polynom čísla β, pak

$$P(x) = f(x)Q(x)\,, \qquad \text{kde} \quad Q \in \mathbb{Z}[x]$$

Odtud $P(0) = f(0)Q(0)$, a proto $|f(0)| \leq |P(0)|$.

Ale pro absolutní člen $P(0)$ polynomu P máme

$$P(0) = -t_m \qquad \text{nebo} \qquad P(0) = t_m - t_{m+p}$$

a tedy $$|P(0)| \leq t_1 = \lfloor \beta \rfloor < \beta.$$

Kvadratická Parryho čísla

Je-li P Parryho polynom a f minimální polynom čísla β, pak

$$P(x) = f(x)Q(x)\,, \qquad \text{kde} \quad Q \in \mathbb{Z}[x]$$

Odtud $P(0) = f(0)Q(0)$, a proto $|f(0)| \le |P(0)|$.

Ale pro absolutní člen $P(0)$ polynomu P máme

$$P(0) = -t_m \qquad \text{nebo} \qquad P(0) = t_m - t_{m+p}$$

a tedy $$|P(0)| \le t_1 = \lfloor \beta \rfloor < \beta.$$

Absolutní člen $f(0)$ je součin kořenů polynomu f,

$$|f(0)| = |\beta||\beta'| \le |P(0)| < \beta \quad \Rightarrow \quad |\beta'| < 1\,.$$

Kvadratická Parryho čísla

Je-li P Parryho polynom a f minimální polynom čísla β, pak

$$P(x) = f(x)Q(x)\,, \qquad \text{kde} \quad Q \in \mathbb{Z}[x]$$

Odtud $P(0) = f(0)Q(0)$, a proto $|f(0)| \le |P(0)|$.

Ale pro absolutní člen $P(0)$ polynomu P máme

$$P(0) = -t_m \qquad \text{nebo} \qquad P(0) = t_m - t_{m+p}$$

a tedy $$|P(0)| \le t_1 = \lfloor \beta \rfloor < \beta.$$

Absolutní člen $f(0)$ je součin kořenů polynomu f,

$$|f(0)| = |\beta||\beta'| \le |P(0)| < \beta \quad \Rightarrow \quad |\beta'| < 1\,.$$

Kvadratická Parryho jsou tedy právě kvadratická Pisotova.

Kvadratická Parryho čísla

Je-li P Parryho polynom a f minimální polynom čísla β, pak

$$P(x) = f(x)Q(x)\,, \qquad \text{kde} \quad Q \in \mathbb{Z}[x]$$

Odtud $P(0) = f(0)Q(0)$, a proto $|f(0)| \le |P(0)|$.

Ale pro absolutní člen $P(0)$ polynomu P máme

$$P(0) = -t_m \qquad \text{nebo} \qquad P(0) = t_m - t_{m+p}$$

a tedy $$|P(0)| \le t_1 = \lfloor \beta \rfloor < \beta.$$

Absolutní člen $f(0)$ je součin kořenů polynomu f,

$$|f(0)| = |\beta||\beta'| \le |P(0)| < \beta \quad \Rightarrow \quad |\beta'| < 1\,.$$

Kvadratická Parryho jsou tedy právě kvadratická Pisotova.

Podobně pro kubická čísla se sdruženými kořeny v $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Otevřené otázky

- Algebraický popis Parryho čísel.

Otevřené otázky

- Algebraický popis Parryho čísel.
- Co je zač polynom $Q(x)$ v rovnosti $P(x) = f(x)Q(x)$?
  Může platit $|Q(0)| \geq 2$?

Otevřené otázky

- Algebraický popis Parryho čísel.
- Co je zač polynom $Q(x)$ v rovnosti $P(x) = f(x)Q(x)$?
  Může platit $|Q(0)| \geq 2$?
- Která Pisotova čísla mají F?

Otevřené otázky

- Algebraický popis Parryho čísel.
- Co je zač polynom $Q(x)$ v rovnosti $P(x) = f(x)Q(x)$?
  Může platit $|Q(0)| \geq 2$?
- Která Pisotova čísla mají F?
- Co lze říci o Itových-Sadahirových číslech?

Otevřené otázky

- Algebraický popis Parryho čísel.

- Co je zač polynom $Q(x)$ v rovnosti $P(x) = f(x)Q(x)$?
  Může platit $|Q(0)| \geq 2$?

- Která Pisotova čísla mají F?

- Co lze říci o Itových-Sadahirových číslech?

  - Jsou vůbec všechna Perronova?
    Matice společnice polynomu P není nezáponá!

Otevřené otázky

- Algebraický popis Parryho čísel.
- Co je zač polynom $Q(x)$ v rovnosti $P(x) = f(x)Q(x)$?
  Může platit $|Q(0)| \geq 2$?
- Která Pisotova čísla mají F?
- Co lze říci o Itových-Sadahirových číslech?
  - Jsou vůbec všechna Perronova?
    Matice společnice polynomu P není nezáporná!
  - Platí Parryho = Itova-Sadahirova čísla?

Otevřené otázky

- Algebraický popis Parryho čísel.
- Co je zač polynom $Q(x)$ v rovnosti $P(x) = f(x)Q(x)$?
  Může platit $|Q(0)| \geq 2$?
- Která Pisotova čísla mají F?
- Co lze říci o Itových-Sadahirových číslech?
  - Jsou vůbec všechna Perronova?
    Matice společnice polynomu P není nezáporná!
  - Platí Parryho $=$ Itova-Sadahirova čísla?
  - A co aritmetika? $\mathrm{Fin}(-\tau)$ není okruh!

Děkuji za pozornost.