Řetězové zlomky definované pomocí β-celých čísel

Zuzana Masáková

Jarní škola a workshop: Kombinatorika na slovech

červen 2009

Cíl

Pro $\alpha \in \mathbb{R}$ lze

$$\alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots}}} =: [a_0, a_1, a_2, \cdots], \quad \text{kde } a_i \in \mathbb{Z}\,;$$

Platí: $[a_0, a_1, a_2 \cdots]$ je konečný $\iff$ $\alpha \in \mathbb{Q}$.

Cíl

Pro $\alpha \in \mathbb{R}$ lze

$$\alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots}}} =: [a_0, a_1, a_2, \cdots], \quad \text{kde } a_i \in \mathbb{Z}\,;$$

Platí: $[a_0, a_1, a_2 \cdots]$ je konečný $\iff$ $\alpha \in \mathbb{Q}$.

Zobecnění: $a_i \in \mathbb{Z}_\beta$

Otázka: Pro která α je $[a_0, a_1, a_2 \cdots]$ konečný?

Algebraicko-geometrické aspekty β-numerace

β-rozvoje

β-reprezentace:

$$x = \sum_{i=-\infty}^{k} b_i \beta^i \,, \qquad b_i \in \{0, 1, 2, \ldots, \lceil \beta \rceil - 1\}$$

β-rozvoje

β-reprezentace:

$$x = \sum_{i=-\infty}^{k} b_i \beta^i \,, \qquad b_i \in \{0, 1, 2, \ldots, \lceil \beta \rceil - 1\}$$

β-rozvoj: lexikograficky největší β-reprezentace
získá se hladovým algoritmem

Značení:

$$(x)_\beta = b_k b_{k-1} \cdots b_1 b_0 \bullet b_{-1} b_{-2} \cdots$$

β-rozvoje

β-reprezentace:

$$x = \sum_{i=-\infty}^{k} b_i \beta^i \,, \qquad b_i \in \{0, 1, 2, \ldots, \lceil\beta\rceil - 1\}$$

β-rozvoj: lexikograficky největší β-reprezentace
získá se hladovým algoritmem

Značení:

$$(x)_\beta = b_k b_{k-1} \cdots b_1 b_0 \bullet b_{-1} b_{-2} \cdots$$

Přípustné rozvoje: podle Rényiova rozvoje jedničky $d_\beta(1)$.

Konečné β-rozvoje

β-celá čísla:

$$\mathbb{Z}_\beta = \{\pm x \mid (x)_\beta = b_k \cdots b_1 b_0 \bullet,\ \ k \in \mathbb{N}_0\}$$

Konečné β-rozvoje:

$$\mathrm{Fin}(\beta) = \bigcup_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\beta^k} \mathbb{Z}_\beta$$

Konečné β-rozvoje

β-celá čísla:

$$\mathbb{Z}_\beta = \{\pm x \mid (x)_\beta = b_k \cdots b_1 b_0 \bullet,\ \ k \in \mathbb{N}_0\}$$

Konečné β-rozvoje:

$$\mathrm{Fin}(\beta) = \bigcup_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\beta^k} \mathbb{Z}_\beta$$

Aritmetika: $\mathbb{Z}_\beta$ okruh pouze pro $\beta \in \mathbb{N}$
$\mathrm{Fin}(\beta)$ obecně taky není okruh

Def: β má *finiteness property*, když $\mathrm{Fin}(\beta)$ je okruh, ekvivalentně,

$$\mathrm{Fin}(\beta) = \mathbb{Z}[\beta^{-1}] := \mathbb{Z} + \frac{1}{\beta}\mathbb{Z} + \frac{1}{\beta^2}\mathbb{Z} + \cdots$$

Aritmetika

Nutná podmínka (Frougny, Solomyak):

$$\beta \text{ má finiteness property} \quad \Longrightarrow \quad \beta \text{ je Pisotovo číslo}$$

Aritmetika

Nutná podmínka (Frougny, Solomyak):

$$\beta \text{ má finiteness property} \quad \Longrightarrow \quad \beta \text{ je Pisotovo číslo}$$

Postačující podmínky na tvar $d_\beta(1) = t_1 t_2 \dots t_m$:

$t_1 \geq t_2 \geq \cdots \geq t_m$ (Frougny, Solomyak)

$t_1 > t_2 + \cdots + t_m$ (Hollander)

Aritmetika

Nutná podmínka (Frougny, Solomyak):

$$\beta \text{ má finiteness property} \quad \Longrightarrow \quad \beta \text{ je Pisotovo číslo}$$

Postačující podmínky na tvar $d_\beta(1) = t_1 t_2 \ldots t_m$:

$t_1 \geq t_2 \geq \cdots \geq t_m$ (Frougny, Solomyak)

$t_1 > t_2 + \cdots + t_m$ (Hollander)

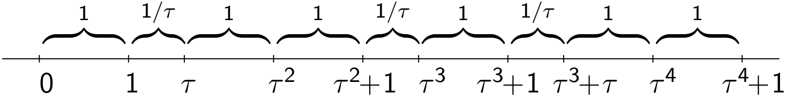
Míra 'složitosti' aritmetických operací:

$$L_\oplus := \min\{k \in \mathbb{N} \mid \mathbb{Z}_\beta + \mathbb{Z}_\beta \cap \mathrm{Fin}(\beta) \subset \tfrac{1}{\beta^k}\mathbb{Z}_\beta\}$$
$$L_\otimes := \min\{k \in \mathbb{N} \mid \mathbb{Z}_\beta \cdot \mathbb{Z}_\beta \cap \mathrm{Fin}(\beta) \subset \tfrac{1}{\beta^k}\mathbb{Z}_\beta\}$$

Příklad: zlatý řez $\tau = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$

$$\mathbb{Z}_\tau = \left\{ \pm \sum_{i=0}^{k} x_i \tau^i \;\middle|\; x_i \in \{0,1\},\ x_i x_{i+1} = 0 \right\}$$

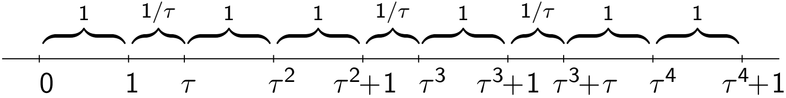
$$\mathbb{Z}_\tau = \pm\{0, 1, \tau, \tau^2, \tau^2+1, \tau^3, \tau^3+1, \tau^3+\tau, \tau^4, \tau^4+1, \dots\}$$



Příklad: zlatý řez $\tau = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$

$$\mathbb{Z}_\tau = \left\{ \pm \sum_{i=0}^{k} x_i \tau^i \;\middle|\; x_i \in \{0,1\},\ x_i x_{i+1} = 0 \right\}$$

$$\mathbb{Z}_\tau = \pm\{0, 1, \tau, \tau^2, \tau^2+1, \tau^3, \tau^3+1, \tau^3+\tau, \tau^4, \tau^4+1, \dots\}$$



Kódováním délek vzdáleností $1 \mapsto a$, $1/\tau \mapsto b$ vznikne slovo

$$abaababaa \cdots$$

Fibonacciho řetězec, sturmovské slovo generované substitucí

$$a \mapsto ab\,, \qquad b \mapsto a$$

Geometrická reprezentace τ-celých čísel

Platí:

$$\mathbb{Z}_\tau^{\geq 0} \; = \; \left\{ a + b\tau \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Z},\; a - \tfrac{b}{\tau} \in (-1, \tau) \right\} \; \cap \; [0, +\infty)$$

Geometrická reprezentace τ-celých čísel

Platí:

$$\mathbb{Z}_\tau^{\geq 0} \;=\; \left\{ a + b\tau \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Z},\; a - \tfrac{b}{\tau} \in (-1, \tau) \right\} \;\cap\; [0, +\infty)$$

Algebraický popis:

$\tau = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}),\ \tau' = \frac{1}{2}(1-\sqrt{5}) = -\frac{1}{\tau}$ kořeny $x^2 - x - 1$

$\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z} =: \mathbb{Z}[\tau]$ okruh celých čísel

tělesa $\mathbb{Q}(\sqrt{5}) = \{a + b\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$

Geometrická reprezentace τ-celých čísel

Platí:

$$\mathbb{Z}_\tau^{\geq 0} \;=\; \left\{a + b\tau \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Z},\; a - \tfrac{b}{\tau} \in (-1, \tau)\right\} \;\cap\; [0, +\infty)$$

Algebraický popis:

$\tau = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}),\; \tau' = \frac{1}{2}(1-\sqrt{5}) = -\frac{1}{\tau}$ kořeny $x^2 - x - 1$

$\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z} =: \mathbb{Z}[\tau]$ okruh celých čísel
tělesa $\mathbb{Q}(\sqrt{5}) = \{a + b\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$

Zobrazení $\quad x = a + b\tau \in \mathbb{Z}[\tau] \quad \mapsto \quad x' = a + b\tau'$

je automorfismus tělesa $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$, tj. $(x+y)' = x' + y'$, $(xy)' = x'y'$.

Geometrie obecně

$\beta > 1$ Pisotovo číslo řádu d, tj. algebraické celé
se sdruženými kořeny $\beta^{(i)}$, $i = 2, \ldots, d$, kde $|\beta^{(i)}| < 1$.

Geometrie obecně

$\beta > 1$ Pisotovo číslo řádu d, tj. algebraické celé
se sdruženými kořeny $\beta^{(i)}$, $i = 2, \ldots, d$, kde $|\beta^{(i)}| < 1$.

Vhodná projekce $\mathbb{Z}^d$ dává

$$\mathbb{Z}[\beta] := \mathbb{Z} + \beta\mathbb{Z} + \cdots + \beta^{d-1}\mathbb{Z}\,,$$

což je podokruh tělesa $\mathbb{Q}(\beta)$ $(= \mathbb{Q} + \beta\mathbb{Q} + \cdots + \beta^{d-1}\mathbb{Q})$.

Geometrie obecně

$\beta > 1$ Pisotovo číslo řádu d, tj. algebraické celé
se sdruženými kořeny $\beta^{(i)}$, $i = 2, \dots, d$, kde $|\beta^{(i)}| < 1$.

Vhodná projekce $\mathbb{Z}^d$ dává

$$\mathbb{Z}[\beta] := \mathbb{Z} + \beta\mathbb{Z} + \cdots + \beta^{d-1}\mathbb{Z}\,,$$

což je podokruh tělesa $\mathbb{Q}(\beta)$ $(= \mathbb{Q} + \beta\mathbb{Q} + \cdots + \beta^{d-1}\mathbb{Q})$.

Isomorfismus těles $\mathbb{Q}(\beta) \mapsto \mathbb{Q}(\beta^{(i)})$

$$x = a_0 + a_1\beta + \cdots + a_{d-1}\beta^{d-1} \mapsto x^{(i)} = a_0 + a_1\beta^{(i)} + \cdots + a_{d-1}(\beta^{(i)})^{d-1}$$

Geometrie obecně

$\beta > 1$ Pisotovo číslo řádu d, tj. algebraické celé
se sdruženými kořeny $\beta^{(i)}$, $i = 2, \dots, d$, kde $|\beta^{(i)}| < 1$.

Vhodná projekce $\mathbb{Z}^d$ dává

$$\mathbb{Z}[\beta] := \mathbb{Z} + \beta\mathbb{Z} + \cdots + \beta^{d-1}\mathbb{Z}\,,$$

což je podokruh tělesa $\mathbb{Q}(\beta)$ $(= \mathbb{Q} + \beta\mathbb{Q} + \cdots + \beta^{d-1}\mathbb{Q})$.

Isomorfismus těles $\mathbb{Q}(\beta) \mapsto \mathbb{Q}(\beta^{(i)})$

$$x = a_0 + a_1\beta + \cdots + a_{d-1}\beta^{d-1} \mapsto x^{(i)} = a_0 + a_1\beta^{(i)} + \cdots + a_{d-1}\big(\beta^{(i)}\big)^{d-1}$$

Pro β-celá čísla platí: $\mathbb{Z}_\beta \subset \mathbb{Z}[\beta]\,,$ tj. lze provést $\mathbb{Z}_\beta^{(i)}$.

Rauzyho fraktál

Je-li $x = \sum_{j=0}^{k} b_j \beta^j \in \mathbb{Z}_\beta$, pak

$$|x^{(i)}| = \Big| \sum_{j=0}^{k} b_j (\beta^{(i)})^j \Big| < \sum_{j=0}^{\infty} (\lceil \beta \rceil - 1) |(\beta^{(i)})|^j = \frac{\lceil \beta \rceil - 1}{1 - |(\beta^{(i)})|},$$

tj. množina $\left\{ |x^{(i)}| \,\middle|\, x \in \mathbb{Z}_\beta \right\}$ je omezená pro každé $i = 2, \ldots, d$.

$\rightarrow$ tzv. Rauzyho fraktál

Rauzyho fraktál pro $\beta = \tau$

$$\overline{(\mathbb{Z}_{\tau}^{\geq 0})'} = \overline{\{x \mid (x)_\beta = b_k \cdots b_1 b_0 \bullet\}'} = [-1, \tau]$$

Rauzyho fraktál pro $\beta = \tau$

$$\overline{(\mathbb{Z}_\tau^{\geq 0})'} = \overline{\{x \mid (x)_\beta = b_k \cdots b_1 b_0 \bullet\}'} = [-1, \tau]$$

Podle suffixů rozvoje:

$\{x' \mid (x)_\beta = b_k \cdots b_2 00 \bullet\}$

Rauzyho fraktál pro $\beta = \tau$

$$\overline{(\mathbb{Z}_\tau^{\geq 0})'} = \overline{\{x \mid (x)_\beta = b_k \cdots b_1 b_0 \bullet\}'} = [-1, \tau]$$

Podle suffixů rozvoje:

$$\{x' \mid (x)_\beta = b_k \cdots b_2 00 \bullet\} = \left(\tau^2 \mathbb{Z}_\tau^{\geq 0}\right)' = \frac{1}{\tau^2}(\mathbb{Z}_\tau^{\geq 0})' \in (-1/\tau^2, 1/\tau)$$

Rauzyho fraktál pro $\beta = \tau$

$$\overline{(\mathbb{Z}_\tau^{\geq 0})'} = \overline{\{x \mid (x)_\beta = b_k \cdots b_1 b_0 \bullet\}'} = [-1, \tau]$$

Podle suffixů rozvoje:

$$\{x' \mid (x)_\beta = b_k \cdots b_2 00 \bullet\} = \left(\tau^2 \mathbb{Z}_\tau^{\geq 0}\right)' = \frac{1}{\tau^2}(\mathbb{Z}_\tau^{\geq 0})' \in (-1/\tau^2, 1/\tau)$$

$$\{x \mid (x)_\beta = b_k \cdots b_2 01 \bullet\}' = \left(\tau^2 \mathbb{Z}_\tau^{\geq 0} + 1\right)' =$$

$$= \frac{1}{\tau^2}(\mathbb{Z}_\tau^{\geq 0})' + 1 \in (1/\tau, \tau)$$

Rauzyho fraktál pro $\beta = \tau$

$$\overline{(\mathbb{Z}_\tau^{\geq 0})'} = \overline{\{x \mid (x)_\beta = b_k \cdots b_1 b_0 \bullet\}'} = [-1, \tau]$$

Podle suffixů rozvoje:

$$\{x' \mid (x)_\beta = b_k \cdots b_2 00\bullet\} = \left(\tau^2 \mathbb{Z}_\tau^{\geq 0}\right)' = \frac{1}{\tau^2}(\mathbb{Z}_\tau^{\geq 0})' \in (-1/\tau^2, 1/\tau)$$

$$\{x \mid (x)_\beta = b_k \cdots b_2 01\bullet\}' = \left(\tau^2 \mathbb{Z}_\tau^{\geq 0} + 1\right)' = $$

$$= \frac{1}{\tau^2}(\mathbb{Z}_\tau^{\geq 0})' + 1 \in (1/\tau, \tau)$$

$$\{x \mid (x)_\beta = b_k \cdots b_2 10\bullet\}' = \left(\tau^3 \mathbb{Z}_\tau^{\geq 0} + \tau\right)' = $$

$$= -\frac{1}{\tau^3}(\mathbb{Z}_\tau^{\geq 0})' - \frac{1}{\tau} \in (-1, -1/\tau^2)$$

Rauzyho fraktál pro $\beta = \tau$

$$\overline{(\mathbb{Z}_\tau^{\geq 0})'} = \overline{\{x \mid (x)_\beta = b_k \cdots b_1 b_0 \bullet\}'} = [-1, \tau]$$

Podle suffixů rozvoje:

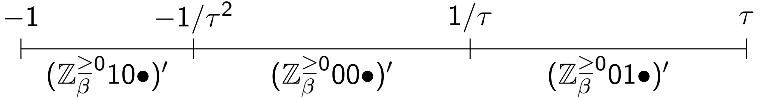
$$\{x' \mid (x)_\beta = b_k \cdots b_2 00\bullet\} = \left(\tau^2 \mathbb{Z}_\tau^{\geq 0}\right)' = \frac{1}{\tau^2}(\mathbb{Z}_\tau^{\geq 0})' \in (-1/\tau^2, 1/\tau)$$

$$\{x \mid (x)_\beta = b_k \cdots b_2 01\bullet\}' = \left(\tau^2 \mathbb{Z}_\tau^{\geq 0} + 1\right)' = $$

$$= \frac{1}{\tau^2}(\mathbb{Z}_\tau^{\geq 0})' + 1 \in (1/\tau, \tau)$$

$$\{x \mid (x)_\beta = b_k \cdots b_2 10\bullet\}' = \left(\tau^3 \mathbb{Z}_\tau^{\geq 0} + \tau\right)' = $$

$$= -\frac{1}{\tau^3}(\mathbb{Z}_\tau^{\geq 0})' - \frac{1}{\tau} \in (-1, -1/\tau^2)$$



Dlážděnı́ prostoru

Pro Tribonacci číslo $\beta > 1$, kořen $x^3 - x^2 - x - 1$, je $\beta^{(2)} = \overline{\beta^{(3)}}$.

Rauzyho fraktál $\overline{\{x^{(i)} \mid x \in \mathbb{Z}_\beta^{\geq 0}\}} \subset \mathbb{C}$

Obrázky...

β-řetězové zlomky

Řetězové zlomky - klasické

Polož $\alpha_0 = \alpha$. Pak pro $j \in \mathbb{N}_0$ dělej

$$\alpha_j = a_j + \frac{1}{\alpha_{j+1}}\,, \quad \text{kde} \quad a_j = [\alpha_j]\,.$$

Konec pro $\alpha_j \in \mathbb{Z}$.

Řetězové zlomky - klasické

Polož $\alpha_0 = \alpha$. Pak pro $j \in \mathbb{N}_0$ dělej

$$\alpha_j = a_j + \frac{1}{\alpha_{j+1}}\,, \quad \text{kde} \quad a_j = [\alpha_j]\,.$$

Konec pro $\alpha_j \in \mathbb{Z}$.

Značíme $\alpha = [a_0, a_1, \ldots, a_n]\,,\quad$ resp. $\quad \alpha = [a_0, a_1, \ldots, a_j, \ldots]$.

Řetězové zlomky - klasické

Polož $\alpha_0 = \alpha$. Pak pro $j \in \mathbb{N}_0$ dělej

$$\alpha_j = a_j + \frac{1}{\alpha_{j+1}}, \quad \text{kde} \quad a_j = [\alpha_j].$$

Konec pro $\alpha_j \in \mathbb{Z}$.

Značíme $\alpha = [a_0, a_1, \dots, a_n]$, resp. $\alpha = [a_0, a_1, \dots, a_j, \dots]$.

Snadno:

$$\alpha = [a_0, a_1, \dots, a_n] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\dots + \cfrac{1}{a_n}}} \quad \Longrightarrow \quad \alpha \in \mathbb{Q}.$$

Řetězové zlomky - klasické

Polož $\alpha_0 = \alpha$. Pak pro $j \in \mathbb{N}_0$ dělej

$$\alpha_j = a_j + \frac{1}{\alpha_{j+1}}\,, \quad \text{kde} \quad a_j = [\alpha_j]\,.$$

Konec pro $\alpha_j \in \mathbb{Z}$.

Značíme $\alpha = [a_0, a_1, \ldots, a_n]\,,$ resp. $\alpha = [a_0, a_1, \ldots, a_j, \ldots]$.

Snadno:

$$\alpha = [a_0, a_1, \ldots, a_n] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\cdots + \cfrac{1}{a_n}}} \quad \Longrightarrow \quad \alpha \in \mathbb{Q}.$$

$$\alpha = [a_0, \ldots, a_k, \overline{a_{k+1}, \ldots, a_{k+l}}] \;\Longrightarrow\; \alpha \text{ je kvadratické nad } \mathbb{Q}.$$

Řetězové zlomky - klasické

Polož $\alpha_0 = \alpha$. Pak pro $j \in \mathbb{N}_0$ dělej

$$\alpha_j = a_j + \frac{1}{\alpha_{j+1}}\,, \quad \text{kde} \quad a_j = [\alpha_j]\,.$$

Konec pro $\alpha_j \in \mathbb{Z}$.

Značíme $\alpha = [a_0, a_1, \ldots, a_n]\,,$ resp. $\alpha = [a_0, a_1, \ldots, a_j, \ldots]$.

Snadno:

$$\alpha = [a_0, a_1, \ldots, a_n] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\cdots + \cfrac{1}{a_n}}} \quad \Longrightarrow \quad \alpha \in \mathbb{Q}.$$

$$\alpha = [a_0, \ldots, a_k, \overline{a_{k+1}, \ldots, a_{k+l}}] \;\Longrightarrow\; \alpha \text{ je kvadratické nad } \mathbb{Q}.$$

Opačné implikace trochu horší.

Eukleidův algoritmus pro řetězový zlomek $\frac{\mathbf{r}}{\mathbf{s}}$

Polož $r_0 := r$, $s_0 := s$, $a_0 := [r_0/s_0]$. Pak

$$r_0 = a_0 s_0 + t_0 \,, \qquad tj. \quad \frac{r_0}{s_0} = a_0 + \frac{t_0}{s_0} = a_0 + \frac{1}{\frac{s_0}{t_0}} \,.$$

Eukleidův algoritmus pro řetězový zlomek $\frac{r}{s}$

Polož $r_0 := r$, $s_0 := s$, $a_0 := [r_0/s_0]$. Pak

$$r_0 = a_0 s_0 + t_0\,, \qquad tj. \quad \frac{r_0}{s_0} = a_0 + \frac{t_0}{s_0} = a_0 + \frac{1}{\frac{s_0}{t_0}}\,.$$

Polož $r_1 := s_0$, $s_1 := t_0 = r_0 - a_0 s_0$, $a_1 := [r_1/s_1]$. Pak

$$r_1 = a_1 s_1 + t_1\,, \qquad tj. \quad \frac{r_0}{s_0} = a_0 + \frac{t_0}{s_0} = a_0 + \frac{1}{\frac{s_0}{t_0}}\,.$$

Eukleidův algoritmus pro řetězový zlomek $\frac{r}{s}$

Polož $r_0 := r$, $s_0 := s$, $a_0 := [r_0/s_0]$. Pak

$$r_0 = a_0 s_0 + t_0\,, \qquad tj. \quad \frac{r_0}{s_0} = a_0 + \frac{t_0}{s_0} = a_0 + \frac{1}{\frac{s_0}{t_0}}\,.$$

Polož $r_1 := s_0$, $s_1 := t_0 = r_0 - a_0 s_0$, $a_1 := [r_1/s_1]$. Pak

$$r_1 = a_1 s_1 + t_1\,, \qquad tj. \quad \frac{r_0}{s_0} = a_0 + \frac{t_0}{s_0} = a_0 + \frac{1}{\frac{s_0}{t_0}}\,.$$

Pro $i \geq 1$ dělej:

$$(r_i, s_i) \quad \mapsto \quad (r_{i+1}, s_{i+1}) := (s_i, r_i - a_i s_i)\,, \quad \text{kde} \;\; a_i = \left[\frac{r_i}{s_i}\right]\,.$$

Protože $s_0 > s_1 > \cdots \geq 0$, algoritmus skončí,

tj. $\frac{r}{s} = [a_0, a_1, \ldots, a_n]$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$.

Řetězové zlomky - zobecněné

Polož $\alpha_0 = \alpha$. Pak pro $j \in \mathbb{N}_0$ dělej

$$\alpha_j = a_j + \frac{1}{\alpha_{j+1}}, \quad \text{kde} \quad a_j = [\alpha_j]_{\beta}.$$

Konec pro $\alpha_j \in \mathbb{Z}_{\beta}$.

Řetězové zlomky - zobecněné

Polož $\alpha_0 = \alpha$. Pak pro $j \in \mathbb{N}_0$ dělej

$$\alpha_j = a_j + \frac{1}{\alpha_{j+1}}\,, \quad \text{kde} \quad a_j = [\alpha_j]_\beta\,.$$

Konec pro $\alpha_j \in \mathbb{Z}_\beta$.

Značíme $\alpha = [a_0, a_1, \ldots, a_n]_\beta\,, \quad$ resp. $\quad \alpha = [a_0, a_1, \ldots, a_j, \ldots]_\beta$.

Řetězové zlomky - zobecněné

Polož $\alpha_0 = \alpha$. Pak pro $j \in \mathbb{N}_0$ dělej

$$\alpha_j = a_j + \frac{1}{\alpha_{j+1}}\,, \quad \text{kde} \quad a_j = [\alpha_j]_\beta\,.$$

Konec pro $\alpha_j \in \mathbb{Z}_\beta$.

Značíme $\alpha = [a_0, a_1, \dots, a_n]_\beta\,,$ resp. $\alpha = [a_0, a_1, \dots, a_j, \dots]_\beta$.

Snadno???:

$$\alpha = [a_0, a_1, \dots, a_n]_\beta = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\cdots + \cfrac{1}{a_n}}} \quad \Longrightarrow \quad \alpha \in ???.$$

Řetězové zlomky - zobecněné

Polož $\alpha_0 = \alpha$. Pak pro $j \in \mathbb{N}_0$ dělej

$$\alpha_j = a_j + \frac{1}{\alpha_{j+1}}, \quad \text{kde} \quad a_j = [\alpha_j]_\beta\,.$$

Konec pro $\alpha_j \in \mathbb{Z}_\beta$.

Značíme $\alpha = [a_0, a_1, \ldots, a_n]_\beta$, resp. $\alpha = [a_0, a_1, \ldots, a_j, \ldots]_\beta$.

Snadno???:

$$\alpha = [a_0, a_1, \ldots, a_n]_\beta = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\cdots + \cfrac{1}{a_n}}} \quad \Longrightarrow \quad \alpha \in ???.$$

Co je $\{x/y \mid x, y \in \mathbb{Z}_\beta,\ y \neq 0\} =: \mathbb{Z}_\beta/\mathbb{Z}_\beta$ zač???

Podíl β-celých čísel

Pro algebraické celé číslo β je $\mathbb{Z}_\beta \subset \mathbb{Z}[\beta]$. Proto

$$\frac{\mathbb{Z}_\beta}{\mathbb{Z}_\beta} \subset \frac{\mathbb{Z}[\beta]}{\mathbb{Z}[\beta]} = \mathbb{Q}(\beta)\,.$$

Podíl β-celých čísel

Pro algebraické celé číslo β je $\mathbb{Z}_\beta \subset \mathbb{Z}[\beta]$. Proto

$$\frac{\mathbb{Z}_\beta}{\mathbb{Z}_\beta} \subset \frac{\mathbb{Z}[\beta]}{\mathbb{Z}[\beta]} = \mathbb{Q}(\beta)\,.$$

(Přesně: $\frac{x}{y}$ pro $x, y \in \mathbb{Z}_\beta$ patří do podílového tělesa okruhu $\mathbb{Z}[\beta]$, což je minimální těleso obsahující $\mathbb{Q}$ a β.)

Podíl β-celých čísel

Pro algebraické celé číslo β je $\mathbb{Z}_\beta \subset \mathbb{Z}[\beta]$. Proto

$$\frac{\mathbb{Z}_\beta}{\mathbb{Z}_\beta} \subset \frac{\mathbb{Z}[\beta]}{\mathbb{Z}[\beta]} = \mathbb{Q}(\beta)\,.$$

(Přesně: $\frac{x}{y}$ pro $x, y \in \mathbb{Z}_\beta$ patří do podílového tělesa okruhu $\mathbb{Z}[\beta]$, což je minimální těleso obsahující $\mathbb{Q}$ a β.)

Naopak:

Každé $\alpha \in \mathbb{Q}(\beta)$ lze zapsat jako $\alpha = \frac{x}{y}$, kde $x, y \in \mathbb{Z}[\beta]$, $y \neq 0$.

Podíl β-celých čísel

Pro algebraické celé číslo β je $\mathbb{Z}_\beta \subset \mathbb{Z}[\beta]$. Proto

$$\frac{\mathbb{Z}_\beta}{\mathbb{Z}_\beta} \subset \frac{\mathbb{Z}[\beta]}{\mathbb{Z}[\beta]} = \mathbb{Q}(\beta)\,.$$

(Přesně: $\frac{x}{y}$ pro $x, y \in \mathbb{Z}_\beta$ patří do podílového tělesa okruhu $\mathbb{Z}[\beta]$, což je minimální těleso obsahující $\mathbb{Q}$ a β.)

Naopak:

Každé $\alpha \in \mathbb{Q}(\beta)$ lze zapsat jako $\alpha = \frac{x}{y}$, kde $x, y \in \mathbb{Z}[\beta]$, $y \neq 0$.

Pokud $\mathbb{Z}[\beta] \subset \mathrm{Fin}(\beta)$, pak existuje $j \in \mathbb{N}$ tak,že

$$x\beta^j,\ y\beta^j \in \mathbb{Z}_\beta\,, \qquad \text{tj.} \quad \alpha = \frac{x\beta^j}{y\beta^j} \in \frac{\mathbb{Z}_\beta}{\mathbb{Z}_\beta}\,.$$

Podíl β-celých čísel

Pro algebraické celé číslo β je $\mathbb{Z}_\beta \subset \mathbb{Z}[\beta]$. Proto

$$\frac{\mathbb{Z}_\beta}{\mathbb{Z}_\beta} \subset \frac{\mathbb{Z}[\beta]}{\mathbb{Z}[\beta]} = \mathbb{Q}(\beta)\,.$$

(Přesně: $\frac{x}{y}$ pro $x, y \in \mathbb{Z}_\beta$ patří do podílového tělesa okruhu $\mathbb{Z}[\beta]$, což je minimální těleso obsahující $\mathbb{Q}$ a β.)

Naopak:

Každé $\alpha \in \mathbb{Q}(\beta)$ lze zapsat jako $\alpha = \frac{x}{y}$, kde $x, y \in \mathbb{Z}[\beta]$, $y \neq 0$.

Pokud $\mathbb{Z}[\beta] \subset \mathrm{Fin}(\beta)$, pak existuje $j \in \mathbb{N}$ tak,že

$$x\beta^j,\ y\beta^j \in \mathbb{Z}_\beta\,, \qquad \text{tj.} \quad \alpha = \frac{x\beta^j}{y\beta^j} \in \frac{\mathbb{Z}_\beta}{\mathbb{Z}_\beta}\,.$$

Proto $\mathbb{Z}_\beta/\mathbb{Z}_\beta = \mathbb{Q}(\beta)$ jen pro β s finiteness property!

Konečnost β-řetězového zlomku

Víme tedy: $\alpha = [a_0, \ldots, a_n]_\beta \implies \alpha \in \mathbb{Q}(\beta)$.

Otázka (smysluplná jen pro β s finiteness property):

Je-li $\alpha \in \mathbb{Q}(\beta)$, je β-řetězový zlomek α konečný?

Konečnost β-řetězového zlomku

Víme tedy: $\quad \alpha = [a_0, \dots, a_n]_\beta \quad \Longrightarrow \quad \alpha \in \mathbb{Q}(\beta).$

Otázka (smysluplná jen pro β s finiteness property):

Je-li $\alpha \in \mathbb{Q}(\beta)$, je β-řetězový zlomek α konečný?

Jak ho vůbec počítat?

Konečnost β-řetězového zlomku

Víme tedy: $\alpha = [a_0, \ldots, a_n]_\beta \quad \Longrightarrow \quad \alpha \in \mathbb{Q}(\beta)$.

Otázka (smysluplná jen pro β s finiteness property):

Je-li $\alpha \in \mathbb{Q}(\beta)$, je β-řetězový zlomek α konečný?

Jak ho vůbec počítat?

Jako dříve pro $i \geq 1$:

$$(r_i, s_i) \quad \mapsto \quad (r_{i+1}, s_{i+1}) := (s_i, r_i - a_i s_i)\,, \quad \text{kde} \ \ a_i = [r_i/s_i]_\beta\,?$$

Konečnost β-řetězového zlomku

Víme tedy: $\alpha = [a_0, \ldots, a_n]_\beta \quad \Longrightarrow \quad \alpha \in \mathbb{Q}(\beta)$.

Otázka (smysluplná jen pro β s finiteness property):

Je-li $\alpha \in \mathbb{Q}(\beta)$, je β-řetězový zlomek α konečný?

Jak ho vůbec počítat?

Jako dříve pro $i \geq 1$:

$$(r_i, s_i) \quad \mapsto \quad (r_{i+1}, s_{i+1}) := (s_i, r_i - a_i s_i)\,, \quad \text{kde} \;\; a_i = [r_i/s_i]_\beta\,?$$

Ne! Pozor! $r_i - a_i s_i \notin \mathbb{Z}_\beta$.

Ale: $\exists\, M$: tak, že $\beta^M(r_i - a_i s_i) \in \mathbb{Z}_\beta$.

β-Eukleidův algoritmus

Pokud $r = as + t$, kde $a = [r/s]_\beta$, $t = r - as$,

$$\frac{r}{s} = a + \frac{t}{s} = a + \frac{1}{\frac{s}{t}} = a + \frac{1}{\frac{\beta^M s}{\beta^M t}} = \text{atd.}$$

β-Eukleidův algoritmus

Pokud $r = as + t$, kde $a = [r/s]_\beta$, $t = r - as$,

$$\frac{r}{s} = a + \frac{t}{s} = a + \frac{1}{\frac{s}{t}} = a + \frac{1}{\frac{\beta^M s}{\beta^M t}} = \text{atd.}$$

Fajn, takže pro $i \geq 1$:

$$(r_i, s_i) \;\mapsto\; (r_{i+1}, s_{i+1}) := \left(\beta^M s_i,\ \beta^M (r_i - a_i s_i)\right),\ \text{kde } a_i = [r_i/s_i]_\beta\ .$$

Jenže! Neklesají jmenovatelé. Bude to konečné?

Příklady pro τ

Nechť $r = \tau^3$, $s = \tau^2 + 1$. Pak

$$\frac{\tau^3}{\tau^2+1} = \frac{\tau^2+\tau}{\tau^2+1} = 1 + \frac{\tau^{-1}}{\tau^2+1} = 1 + \frac{1}{\dfrac{\tau^2+1}{\tau^{-1}}} = 1 + \frac{1}{\tau^3+\tau}\,.$$

Příklady pro τ

Nechť $r = \tau^3$, $s = \tau^2 + 1$. Pak

$$\frac{\tau^3}{\tau^2+1} = \frac{\tau^2+\tau}{\tau^2+1} = 1 + \frac{\tau^{-1}}{\tau^2+1} = 1 + \frac{1}{\dfrac{\tau^2+1}{\tau^{-1}}} = 1 + \frac{1}{\tau^3+\tau}\,.$$

V prvním kroku $[r/s]_\tau = 1$. Proto

$$t = r - as = \tau^3 - (\tau^2+1) = \tau - 1 = \frac{1}{\tau}\,.$$

Příklady pro τ

Nechť $r = \tau^3$, $s = \tau^2 + 1$. Pak

$$\frac{\tau^3}{\tau^2+1} = \frac{\tau^2+\tau}{\tau^2+1} = 1 + \frac{\tau^{-1}}{\tau^2+1} = 1 + \frac{1}{\cfrac{\tau^2+1}{\tau^{-1}}} = 1 + \frac{1}{\tau^3+\tau}\,.$$

V prvním kroku $[r/s]_\tau = 1$. Proto

$$t = r - as = \tau^3 - (\tau^2+1) = \tau - 1 = \frac{1}{\tau}\,.$$

Nutno volit $M = 1$, tj.

$$(r,s) = (\tau^3, \tau^2+1) \quad \mapsto \quad \big(\tau s, \tau(r - as)\big) = (\tau^3+\tau, 1)\,.$$

Příklady pro τ

Nechť $r = \tau^3$, $s = \tau^2 + 1$. Pak

$$\frac{\tau^3}{\tau^2+1} = \frac{\tau^2+\tau}{\tau^2+1} = 1 + \frac{\tau^{-1}}{\tau^2+1} = 1 + \frac{1}{\frac{\tau^2+1}{\tau^{-1}}} = 1 + \frac{1}{\tau^3+\tau}\,.$$

V prvním kroku $[r/s]_\tau = 1$. Proto

$$t = r - as = \tau^3 - (\tau^2+1) = \tau - 1 = \frac{1}{\tau}\,.$$

Nutno volit $M = 1$, tj.

$$(r,s) = (\tau^3, \tau^2+1) \quad \mapsto \quad \big(\tau s, \tau(r-as)\big) = (\tau^3+\tau, 1)\,.$$

V dalším kroku $\quad (\tau^3+\tau, 1) \mapsto (1,0)$.

Příklady pro τ

Nechť $r = \tau^3$, $s = \tau^2 + 1$. Pak

$$\frac{\tau^3}{\tau^2+1} = \frac{\tau^2+\tau}{\tau^2+1} = 1 + \frac{\tau^{-1}}{\tau^2+1} = 1 + \frac{1}{\dfrac{\tau^2+1}{\tau^{-1}}} = 1 + \frac{1}{\tau^3+\tau}\,.$$

V prvním kroku $[r/s]_\tau = 1$. Proto

$$t = r - as = \tau^3 - (\tau^2+1) = \tau - 1 = \frac{1}{\tau}\,.$$

Nutno volit $M = 1$, tj.

$$(r,s) = (\tau^3, \tau^2+1) \quad \mapsto \quad \big(\tau s, \tau(r - as)\big) = (\tau^3+\tau, 1)\,.$$

V dalším kroku $\quad (\tau^3+\tau, 1) \;\mapsto\; (1, 0)$.

Řetězový zlomek $\dfrac{\tau^3}{\tau^2+1} = [1, \tau^3+\tau]_\tau\,.$

Příklady pro τ

Nechť $r = \tau^7 + \tau^5 + \tau$, $s = \tau^4 + \tau^2 + 1$. Pak

$$\frac{\tau^7 + \tau^5 + \tau}{\tau^4 + \tau^2 + 1} = \tau^2 + 1 + \frac{\tau^2 + 1 + \tau^{-3}}{\tau^4 + \tau^2 + 1}\,.$$

Příklady pro τ

Nechť $r = \tau^7 + \tau^5 + \tau$, $s = \tau^4 + \tau^2 + 1$. Pak

$$\frac{\tau^7 + \tau^5 + \tau}{\tau^4 + \tau^2 + 1} = \tau^2 + 1 + \frac{\tau^2 + 1 + \tau^{-3}}{\tau^4 + \tau^2 + 1} .$$

Máme $[r/s]_\tau = \tau^2 + 1$, $t = r - as = \tau^2 + 1 + \tau^{-3}$, a proto $M = 3$,

$$\begin{aligned} (r, s) &= (\tau^7 + \tau^5 + \tau, \tau^4 + \tau^2 + 1) \\ &\downarrow \\ (\tau^3 s, \tau^3(r - as)) &= (\tau^7 + \tau^5 + \tau^3, \tau^5 + \tau^3 + 1) . \end{aligned}$$

Pozor! jmenovatel neklesá!

τ-Eukleidův algoritmus

Platí: Pro všechna $0 < r, s \in \mathbb{Z}_\tau$ je $\quad \tau^3\big(r - [r/s]_\beta s\big) \in \mathbb{Z}_\tau$.

důkaz pomocí $\big(\mathbb{Z}_\tau^{\geq 0}\big)' \in (-1, \tau)$.

τ-Eukleidův algoritmus

Platí: Pro všechna $0 < r, s \in \mathbb{Z}_\tau$ je $\quad \tau^3\big(r - [r/s]_\beta s\big) \in \mathbb{Z}_\tau$.

důkaz pomocí $\big(\mathbb{Z}_\tau^{\geq 0}\big)' \in (-1, \tau)$.

Do předpisu

$$(r_i, s_i) \mapsto (r_{i+1}, s_{i+1}) := \big(\tau^M s_i,\ \tau^M(r_i - a_i s_i)\big)\,,\ \text{kde } a_i = [r_i/s_i]_\tau$$

volím vždy nejmenší možné $M \in \{0, 1, 2, 3\}$.

Jak zjistit konečnost, když neklesají jmenovatelé?

(někdy $\tau^M(r_i - a_i s_i) > s_i$)

τ-Eukleidův algoritmus

Pro $x \in \mathbb{Z}_\beta$ s rozvojem $(x)_\beta = x_k \cdots x_1 x_0 \bullet x_{-1} \cdots x_{-\tilde{k}}$ označme

$$\ell(x) := k + \tilde{k} + 1\,.$$

τ-Eukleidův algoritmus

Pro $x \in \mathbb{Z}_\beta$ s rozvojem $(x)_\beta = x_k \cdots x_1 x_0 \bullet x_{-1} \cdots x_{-\tilde{k}}$ označme

$$\ell(x) := k + \tilde{k} + 1\,.$$

Pro $r, s \in \mathbb{Z}_\beta$ označme

$$\ell(r, s) := \ell(r) + \ell(s) - 1\,.$$

τ-Eukleidův algoritmus

Pro $x \in \mathbb{Z}_\beta$ s rozvojem $(x)_\beta = x_k \cdots x_1 x_0 \bullet x_{-1} \cdots x_{-\tilde{k}}$ označme

$$\ell(x) := k + \tilde{k} + 1\,.$$

Pro $r, s \in \mathbb{Z}_\beta$ označme

$$\ell(r,s) := \ell(r) + \ell(s) - 1\,.$$

Pro páry $(r_{i+1}, s_{i+1}) := \big(\tau^M s_i,\ \tau^M (r_i - a_i s_i)\big)$ pak platí

$$\ell(r_{i+1}, s_{i+1}) \ \leq\ \ell(r_i, s_i) + 2M \ \leq\ (r_i, s_i) + 2(L_\oplus + L_\otimes)\,.$$

τ-Eukleidův algoritmus

Pro $x \in \mathbb{Z}_\beta$ s rozvojem $(x)_\beta = x_k \cdots x_1 x_0 \bullet x_{-1} \cdots x_{-\tilde{k}}$ označme

$$\ell(x) := k + \tilde{k} + 1\,.$$

Pro $r, s \in \mathbb{Z}_\beta$ označme

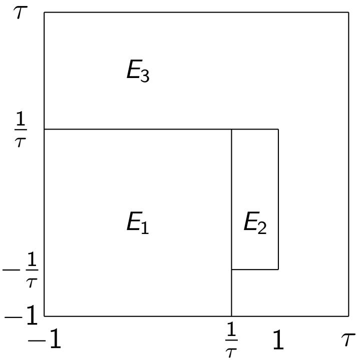
$$\ell(r,s) := \ell(r) + \ell(s) - 1\,.$$

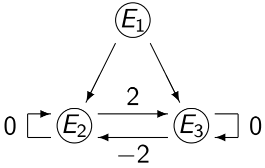
Pro páry $(r_{i+1}, s_{i+1}) := \big(\tau^M s_i,\ \tau^M(r_i - a_i s_i)\big)$ pak platí

$$\ell(r_{i+1}, s_{i+1}) \ \le\ \ell(r_i, s_i) + 2M \ \le\ (r_i, s_i) + 2(L_\oplus + L_\otimes)\,.$$

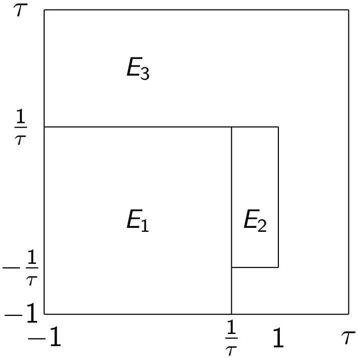
Pro $\beta = \tau$ je obecně $\ell(r_{i+1}, s_{i+1}) \le (r_i, s_i) + 6$, ale lze detailněji analyzovat.

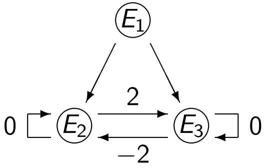
Změna $\ell(r_i, s_i)$ v τ-Eukleidově algoritmu





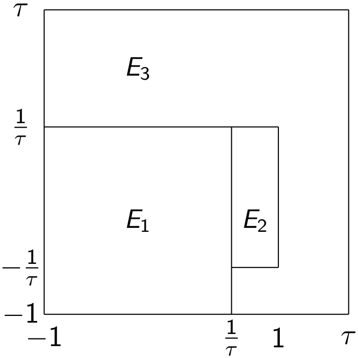
Změna $\ell(r_i, s_i)$ v τ-Eukleidově algoritmu

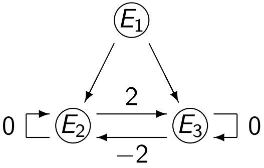




$\ell(r_i, s_i)$, $i \geq 0$, je omezené, je tedy pouze konečně mnoho možností na hodnotu r_i/s_i.

Změna $\ell(r_i, s_i)$ v τ-Eukleidově algoritmu

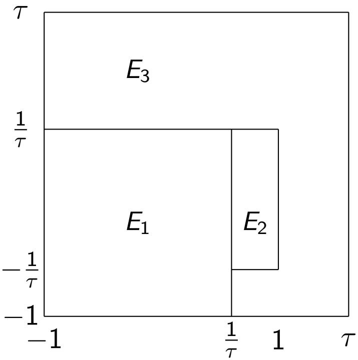


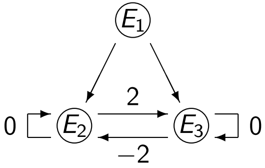


$\ell(r_i, s_i)$, $i \geq 0$, je omezené, je tedy pouze konečně mnoho možností na hodnotu r_i/s_i.

$\Longrightarrow$ r/s má konečný nebo posléze periodický τ-řetězový zlomek.

Změna $\ell(r_i, s_i)$ v τ-Eukleidově algoritmu



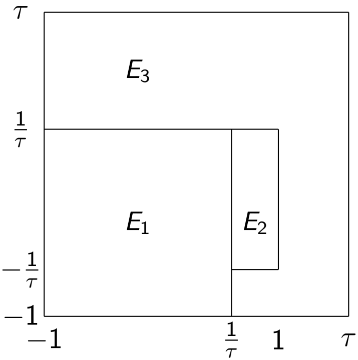


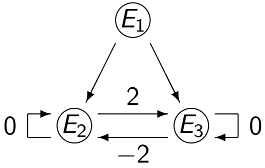
$\ell(r_i, s_i)$, $i \geq 0$, je omezené, je tedy pouze konečně mnoho možností na hodnotu r_i/s_i.

$\implies$ r/s má konečný nebo posléze periodický τ-řetězový zlomek.

Konečnost $\cdots$

Změna $\ell(r_i, s_i)$ v τ-Eukleidově algoritmu





$\ell(r_i, s_i)$, $i \geq 0$, je omezené, je tedy pouze konečně mnoho možností na hodnotu r_i/s_i.

$\implies$ r/s má konečný nebo posléze periodický τ-řetězový zlomek.

Konečnost $\cdots$ ještě větší patlačka, ale platí!

Shrnutí

- β-řetězový zlomek lze definovat pro všechna $\beta > 1$.

Shrnutí

- β-řetězový zlomek lze definovat pro všechna $\beta > 1$.
- Pro β alebraické celé platí:
  Je-li β-řetězový zlomek čísla α konečný, pak $\alpha \in \mathbb{Q}(\beta)$.

Shrnutí

- β-řetězový zlomek lze definovat pro všechna $\beta > 1$.
- Pro β alebraické celé platí:
  Je-li β-řetězový zlomek čísla α konečný, pak $\alpha \in \mathbb{Q}(\beta)$.
- Aby $\{x/y \mid x, y \in \mathbb{Z}_\beta, y \neq 0\} = \mathbb{Q}(\beta)$, musí platit finiteness property.

Shrnutí

- β-řetězový zlomek lze definovat pro všechna $\beta > 1$.
- Pro β alebraické celé platí:
  Je-li β-řetězový zlomek čísla α konečný, pak $\alpha \in \mathbb{Q}(\beta)$.
- Aby $\{x/y \mid x, y \in \mathbb{Z}_\beta, y \neq 0\} = \mathbb{Q}(\beta)$, musí platit finiteness property.
- Pro $\beta = \tau$ platí:
  Je-li $\alpha \in \mathbb{Q}(\tau)$, pak τ-řetězový zlomek čísla α je konečný.

Shrnutí

- β-řetězový zlomek lze definovat pro všechna $\beta > 1$.
- Pro β alebraické celé platí:
  Je-li β-řetězový zlomek čísla α konečný, pak $\alpha \in \mathbb{Q}(\beta)$.
- Aby $\{x/y \mid x, y \in \mathbb{Z}_\beta, y \neq 0\} = \mathbb{Q}(\beta)$, musí platit finiteness property.
- Pro $\beta = \tau$ platí:
  Je-li $\alpha \in \mathbb{Q}(\tau)$, pak τ-řetězový zlomek čísla α je konečný.
- Neumíme zobecnit. Rozhodně neplatí pro všechna β s finiteness property.

Shrnutí

- β-řetězový zlomek lze definovat pro všechna $\beta > 1$.
- Pro β alebraické celé platí:
  Je-li β-řetězový zlomek čísla α konečný, pak $\alpha \in \mathbb{Q}(\beta)$.
- Aby $\{x/y \mid x, y \in \mathbb{Z}_\beta, y \neq 0\} = \mathbb{Q}(\beta)$, musí platit finiteness property.
- Pro $\beta = \tau$ platí:
  Je-li $\alpha \in \mathbb{Q}(\tau)$, pak τ-řetězový zlomek čísla α je konečný.
- Neumíme zobecnit. Rozhodně neplatí pro všechna β s finiteness property.
  Příklad: β kořen $x^2 - 4x - 1$, $\beta = 2 + \sqrt{5} = \tau^3$.
  Máme $\mathbb{Q}(\beta) = \mathbb{Q}(\tau) = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$.
  β-řetězový zlomek zlatého řezu je $\tau = [\,\overline{1}\,]_\beta$ ... nekonečný!

Shrnutí

- β-řetězový zlomek lze definovat pro všechna $\beta > 1$.
- Pro β alebraické celé platí:
  Je-li β-řetězový zlomek čísla α konečný, pak $\alpha \in \mathbb{Q}(\beta)$.
- Aby $\{x/y \mid x, y \in \mathbb{Z}_\beta, y \neq 0\} = \mathbb{Q}(\beta)$, musí platit finiteness property.
- Pro $\beta = \tau$ platí:
  Je-li $\alpha \in \mathbb{Q}(\tau)$, pak τ-řetězový zlomek čísla α je konečný.
- Neumíme zobecnit. Rozhodně neplatí pro všechna β s finiteness property.
  Příklad: β kořen $x^2 - 4x - 1$, $\beta = 2 + \sqrt{5} = \tau^3$.
  Máme $\mathbb{Q}(\beta) = \mathbb{Q}(\tau) = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$.
  β-řetězový zlomek zlatého řezu je $\tau = [\,\overline{1}\,]_\beta$ ... nekonečný!
- Je aspoň β-řetězový zlomek čísla z $\mathbb{Q}(\beta)$ vždy posléze periodický, když ne konečný?

Není mi jasné

- Jednoznačnost.

Není mi jasné

- Jednoznačnost.
- Konvergence.

Není mi jasné

- Jednoznačnost.
- Konvergence.
- Algoritmus hledání β-celé části čísla z $\mathbb{Q}(\beta) = \mathbb{Z}_\beta/\mathbb{Z}_\beta$.

Není mi jasné

- Jednoznačnost.
- Konvergence.
- Algoritmus hledání β-celé části čísla z $\mathbb{Q}(\beta) = \mathbb{Z}_\beta / \mathbb{Z}_\beta$.
- Pro která β je ještě β-řetězový zlomek zlatého řezu roven $\tau = [\,\overline{1}\,]_\beta$?

Děkuji za pozornost.