Poziční numerační soustavy se zápornou bází III

Zuzana Masáková

Seminář kombinatorických a algebraických struktur

3. listopadu 2009

Osnova

- Připomenutí Rényiho β-rozvojů a vlastností množiny $\mathbb{Z}_\beta$.

Osnova

- Připomenutí Rényiho β-rozvojů a vlastností množiny $\mathbb{Z}_\beta$.
- Připomenutí Ito-Sadahiro $(-\beta)$-rozvojů:
  - transformace $T_{-\beta} : I_\beta \mapsto I_\beta$
  - přípustnost rozvojů ve střídavém uspořádání
  - rozvoje čísel $x \notin I_\beta$ a jejich nejednoznačnost
  - definice $\mathbb{Z}_{-\beta}$

Osnova

- Připomenutí Rényiho β-rozvojů a vlastností množiny $\mathbb{Z}_\beta$.
- Připomenutí Ito-Sadahiro $(-\beta)$-rozvojů:
  - transformace $T_{-\beta} : I_\beta \mapsto I_\beta$
  - přípustnost rozvojů ve střídavém uspořádání
  - rozvoje čísel $x \notin I_\beta$ a jejich nejednoznačnost
  - definice $\mathbb{Z}_{-\beta}$
- Řešení nejednoznačnosti pomocí ,,hladového algoritmu''

Osnova

- Připomenutí Rényiho β-rozvojů a vlastností množiny $\mathbb{Z}_\beta$.
- Připomenutí Ito-Sadahiro $(-\beta)$-rozvojů:
  - transformace $T_{-\beta} : I_\beta \mapsto I_\beta$
  - přípustnost rozvojů ve střídavém uspořádání
  - rozvoje čísel $x \notin I_\beta$ a jejich nejednoznačnost
  - definice $\mathbb{Z}_{-\beta}$
- Řešení nejednoznačnosti pomocí ,,hladového algoritmu"
- Popis $\mathbb{Z}_{-\beta}$:
  - Kdy je netriviální?
  - Když netriviální, pak nekonečná a diskrétní.
  - Popis vzdáleností mezi sousedy

Osnova

- Připomenutí Rényiho β-rozvojů a vlastností množiny $\mathbb{Z}_\beta$.
- Připomenutí Ito-Sadahiro $(-\beta)$-rozvojů:
  - transformace $T_{-\beta} : I_\beta \mapsto I_\beta$
  - přípustnost rozvojů ve střídavém uspořádání
  - rozvoje čísel $x \notin I_\beta$ a jejich nejednoznačnost
  - definice $\mathbb{Z}_{-\beta}$
- Řešení nejednoznačnosti pomocí ,,hladového algoritmu"
- Popis $\mathbb{Z}_{-\beta}$:
  - Kdy je netriviální?
  - Když netriviální, pak nekonečná a diskrétní.
  - Popis vzdáleností mezi sousedy
- Otevřené otázky

O Rényiho β-rozvojích I

β-transformace

$$T_\beta : [0,1) \mapsto [0,1)\,, \qquad T_\beta(x) = \beta x - \lfloor \beta x \rfloor\,.$$

Pro $x \in [0,1)$ definujeme cifry a_i, $i = 1,2,3,\ldots,$ kde

$$a_i = \lfloor \beta T_\beta^{(i-1)}(x) \rfloor \in \{0,1,\ldots,\lfloor \beta \rfloor\}\,.$$

Pak $\quad d(\beta,x) = a_1 a_2 a_3 \cdots\,, \quad$ tj. $\quad x = \dfrac{a_1}{\beta} + \dfrac{a_2}{\beta^2} + \dfrac{a_3}{\beta^3} + \cdots\,.$

O Rényiho β-rozvojích I

β-transformace

$$T_\beta : [0,1) \mapsto [0,1)\,, \qquad T_\beta(x) = \beta x - \lfloor \beta x \rfloor\,.$$

Pro $x \in [0,1)$ definujeme cifry a_i, $i = 1,2,3,\ldots$, kde

$$a_i = \lfloor \beta T_\beta^{(i-1)}(x) \rfloor \in \{0,1,\ldots,\lfloor \beta \rfloor\}\,.$$

Pak $\quad d(\beta,x) = a_1 a_2 a_3 \cdots\,,\quad$ tj. $\quad x = \frac{a_1}{\beta} + \frac{a_2}{\beta^2} + \frac{a_3}{\beta^3} + \cdots\,.$

Řetězec cifer $a_1 a_2 a_3 \cdots$ je přípustný, právě když pro $i = 1,2,3,\ldots$

$$0^\omega \preceq_{\text{lex}} a_i a_{i+1} a_{i+2} \cdots \prec_{\text{lex}} d^*(\beta,1) = \lim_{\varepsilon \to 0+} d(\beta, 1-\varepsilon)\,.$$

O Rényiho β-rozvojích I

β-transformace

$$T_\beta : [0,1) \mapsto [0,1)\,, \qquad T_\beta(x) = \beta x - \lfloor \beta x \rfloor\,.$$

Pro $x \in [0,1)$ definujeme cifry a_i, $i = 1,2,3,\ldots,$ kde

$$a_i = \lfloor \beta T_\beta^{(i-1)}(x) \rfloor \in \{0,1,\ldots,\lfloor \beta \rfloor\}\,.$$

Pak $\quad d(\beta,x) = a_1 a_2 a_3 \cdots\,, \quad$ tj. $\quad x = \frac{a_1}{\beta} + \frac{a_2}{\beta^2} + \frac{a_3}{\beta^3} + \cdots\,.$

Řetězec cifer $a_1 a_2 a_3 \cdots$ je přípustný, právě když pro $i = 1,2,3,\ldots$

$$0^\omega \ \preceq_{\text{lex}}\ a_i a_{i+1} a_{i+2} \cdots \ \prec_{\text{lex}}\ d^*(\beta,1) = \lim_{\varepsilon \to 0+} d(\beta, 1-\varepsilon)\,.$$

Rényiho rozvoj jedničky: $d(\beta,1) = t_1 t_2 t_3 \cdots\,,$

kde $t_1 = \lfloor \beta \rfloor$ a $t_2 t_3 \cdots = d(\beta, \beta - t_1)$.

O Rényiho β-rozvojích II

Není nejednoznačnost:

Pro každé $x > 0$ je právě jeden přípustný v retězec.

Je to ten, který najde hladový algoritmus.

O Rényiho β-rozvojích II

Není nejednoznačnost:

Pro každé $x > 0$ je právě jeden přípustný v retězec.

Je to ten, který najde hladový algoritmus.

β-celá čísla:

$$\mathbb{Z}_\beta^+ = \{a_k\beta^k + \cdots + a_1\beta + a_0 \mid a_k a_{k-1} \cdots a_1 a_0 0^\omega \text{ je přípustný}\}$$

O Rényiho β-rozvojích II

Není nejednoznačnost:

Pro každé $x > 0$ je právě jeden přípustný v retězec.

Je to ten, který najde hladový algoritmus.

β-celá čísla:

$$\mathbb{Z}_\beta^+ = \{a_k\beta^k + \cdots + a_1\beta + a_0 \mid a_k a_{k-1} \cdots a_1 a_0 0^\omega \text{ je přípustný}\}$$

$\mathbb{Z}_\beta = \mathbb{Z}_\beta^+ \cup (-\mathbb{Z}_\beta^+)$ je diskrétní.

O Rényiho β-rozvojích II

Není nejednoznačnost:

Pro každé $x > 0$ je právě jeden přípustný v retězec.

Je to ten, který najde hladový algoritmus.

β-celá čísla:

$$\mathbb{Z}_\beta^+ = \{a_k\beta^k + \cdots + a_1\beta + a_0 \mid a_k a_{k-1} \cdots a_1 a_0 0^\omega \text{ je přípustný}\}$$

$\mathbb{Z}_\beta = \mathbb{Z}_\beta^+ \cup (-\mathbb{Z}_\beta^+)$ je diskrétní.

Vzdálenosti mezi sousedními β-celými čísly: $\Delta_i = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{t_{i+j}}{\beta^j} < 1\,.$

O Rényiho β-rozvojích II

Není nejednoznačnost:

Pro každé $x > 0$ je právě jeden přípustný v retězec.

Je to ten, který najde hladový algoritmus.

β-celá čísla:

$$\mathbb{Z}_\beta^+ = \{a_k\beta^k + \cdots + a_1\beta + a_0 \mid a_k a_{k-1} \cdots a_1 a_0 0^\omega \text{ je přípustný}\}$$

$\mathbb{Z}_\beta = \mathbb{Z}_\beta^+ \cup (-\mathbb{Z}_\beta^+)$ je diskrétní.

Vzdálenosti mezi sousedními β-celými čísly: $\Delta_i = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{t_{i+j}}{\beta^j} < 1\,.$

Je jich konečně mnoho, když $d(\beta, 1)$ je periodický (β Parryho číslo)

O Rényiho β-rozvojích II

Není nejednoznačnost:

Pro každé $x > 0$ je právě jeden přípustný v retězec.

Je to ten, který najde hladový algoritmus.

β-celá čísla:

$$\mathbb{Z}_\beta^+ = \{a_k\beta^k + \cdots + a_1\beta + a_0 \mid a_k a_{k-1}\cdots a_1 a_0 0^\omega \text{ je přípustný}\}$$

$\mathbb{Z}_\beta = \mathbb{Z}_\beta^+ \cup (-\mathbb{Z}_\beta^+)$ je diskrétní.

Vzdálenosti mezi sousedními β-celými čísly: $\Delta_i = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{t_{i+j}}{\beta^j} < 1\,.$

Je jich konečně mnoho, když $d(\beta,1)$ je periodický (β Parryho číslo)

$\mathbb{Z}_\beta$ kódováno nekonečným slovem u_β invariantním na substituci φ_β.

Itovy-Sadahirovy $(-\beta)$-rozvoje

$(-\beta)$-transformace

$$T_{-\beta} : \left[\frac{-\beta}{\beta+1}, \frac{1}{\beta+1}\right) \mapsto \left[\frac{-\beta}{\beta+1}, \frac{1}{\beta+1}\right),$$

$$T_{-\beta}(x) = -\beta x - \left\lfloor -\beta x + \frac{\beta}{\beta+1}\right\rfloor .$$

Itovy-Sadahirovy $(-\beta)$-rozvoje

$(-\beta)$-transformace

$$T_{-\beta} : \Big[\frac{-\beta}{\beta+1}, \frac{1}{\beta+1}\Big) \mapsto \Big[\frac{-\beta}{\beta+1}, \frac{1}{\beta+1}\Big)\,,$$

$$T_{-\beta}(x) = -\beta x - \Big\lfloor -\beta x + \frac{\beta}{\beta+1} \Big\rfloor\,.$$

Pro $x \in \big[\frac{-\beta}{\beta+1}, \frac{1}{\beta+1}\big)$ definujeme cifry a_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$, kde

$$a_i = \Big\lfloor T_{-\beta}^{(i-1)}(x) + \frac{\beta}{\beta+1} \Big\rfloor \in \{0, 1, \ldots, \lfloor \beta \rfloor\}\,.$$

Pak $\quad d(-\beta, x) = a_1 a_2 a_3 \cdots$, tj.

$$x = \frac{a_1}{-\beta} + \frac{a_2}{(-\beta)^2} + \frac{a_3}{(-\beta)^3} + \cdots\,.$$

Přípustné řetězce cifer

Střídavé uspořádání: $x_1 x_2 x_3 \cdots \prec_{\mathrm{alt}} y_1 y_2 y_3 \cdots$

$$\iff \qquad (-1)^j (y_j - x_j) > 0 \text{ pro první } j\text{, kde se liší}$$

Přípustné řetězce cifer

Střídavé uspořádání: $x_1x_2x_3\cdots \prec_{\mathsf{alt}} y_1y_2y_3\cdots$

$$\iff \qquad (-1)^j(y_j - x_j) > 0 \text{ pro první } j\text{, kde se liší}$$

Řetězec cifer $x_1x_2x_3\cdots$ je přípustný, právě když pro $i = 1, 2, 3, \ldots$

$$d(-\beta, l_\beta) \preceq_{\mathsf{alt}} x_ix_{i+1}x_{i+2}\cdots \prec_{\mathsf{alt}} d^*(-\beta, r_\beta) = \lim_{\varepsilon\to 0+} d(-\beta, r_\beta - \varepsilon)\,.$$

Přípustné řetězce cifer

Střídavé uspořádání: $x_1 x_2 x_3 \cdots \prec_{\text{alt}} y_1 y_2 y_3 \cdots$

$$\iff \qquad (-1)^j (y_j - x_j) > 0 \text{ pro první } j\text{, kde se liší}$$

Řetězec cifer $x_1 x_2 x_3 \cdots$ je přípustný, právě když pro $i = 1, 2, 3, \ldots$

$$d(-\beta, l_\beta) \preceq_{\text{alt}} x_i x_{i+1} x_{i+2} \cdots \prec_{\text{alt}} d^*(-\beta, r_\beta) = \lim_{\varepsilon \to 0+} d(-\beta, r_\beta - \varepsilon)\,.$$

Označme $d(-\beta, l_\beta) = d_1 d_2 d_3 \cdots$, pak

$$d^*(-\beta, r_\beta) = \begin{cases} 0 d_1 d_2 d_3 \cdots & \text{většinou,} \\ \big(0 d_1 \cdots d_{2t} (d_{2t+1} - 1)\big)^\omega & \text{jinak.} \end{cases}$$

Přípustné řetězce cifer

Střídavé uspořádání: $x_1x_2x_3\cdots \prec_{\text{alt}} y_1y_2y_3\cdots$

$\iff$ $(-1)^j(y_j - x_j) > 0$ pro první j, kde se liší

Řetězec cifer $x_1x_2x_3\cdots$ je přípustný, právě když pro $i = 1, 2, 3, \ldots$

$$d(-\beta, l_\beta) \preceq_{\text{alt}} x_i x_{i+1} x_{i+2}\cdots \prec_{\text{alt}} d^*(-\beta, r_\beta) = \lim_{\varepsilon\to 0+} d(-\beta, r_\beta - \varepsilon)\,.$$

Označme $d(-\beta, l_\beta) = d_1d_2d_3\cdots$, pak

$$d^*(-\beta, r_\beta) = \begin{cases} 0d_1d_2d_3\cdots & \text{většinou,} \\ \big(0d_1\cdots d_{2t}(d_{2t+1}-1)\big)^\omega & \text{jinak.} \end{cases}$$

Zvláštnost:

$d(-\beta, l_\beta) = d_1d_2d_3\cdots$ je přípustný, ale $0d_1d_2d_3\cdots$ není.

Nejednoznačnost rozvoje

Když $a_k a_{k-1} a_{k-2} \cdots$ je přípustný, $a_k \neq 0$, pak

$$x = \sum_{i=-\infty}^{k} a_i(-\beta)^i \in \begin{cases} \left[\frac{\beta^k}{\beta+1}, \frac{\beta^{k+2}}{\beta+1}\right] & \text{for } k \text{ even,} \\ \left[-\frac{\beta^{k+2}}{\beta+1}, -\frac{\beta^k}{\beta+1}\right] & \text{for } k \text{ odd.} \end{cases}$$

Nejednoznačnost rozvoje

Když $a_k a_{k-1} a_{k-2} \cdots$ je přípustný, $a_k \neq 0$, pak

$$x = \sum_{i=-\infty}^{k} a_i(-\beta)^i \in \begin{cases} \left[\frac{\beta^k}{\beta+1}, \frac{\beta^{k+2}}{\beta+1}\right] & \text{for } k \text{ even,} \\ \left[-\frac{\beta^{k+2}}{\beta+1}, -\frac{\beta^k}{\beta+1}\right] & \text{for } k \text{ odd.} \end{cases}$$

Hladový algoritmus:

Je-li $x > 0$:

najdi k sudé tak, že $\dfrac{\beta^k}{\beta+1} \leq x < \dfrac{\beta^{k+2}}{\beta+1}$.

polož cifru $a_k := \left\lfloor \frac{x}{(-\beta)^k} + \frac{\beta}{\beta+1} \right\rfloor$ a nové $x := x - a_k(-\beta)^k$.

Je-li $x < 0$:

najdi k liché tak, že $\dfrac{\beta^{k+2}}{\beta+1} < x \leq \dfrac{\beta^k}{\beta+1}$.

polož cifru $a_k := \left\lfloor \frac{x}{(-\beta)^k} + \frac{\beta}{\beta+1} \right\rfloor$ a nové $x := x - a_k(-\beta)^k$.

Vlastnosti $(-\beta)$-celých čísel

$$\mathbb{Z}_{-\beta} := \{a_k\beta^k + \cdots + a_1\beta + a_0 \mid a_k a_{k-1} \cdots a_1 a_0 0^\omega \text{ je přípustný}\}$$

Vlastnosti $(-\beta)$-celých čísel

$$\mathbb{Z}_{-\beta} := \{a_k\beta^k + \cdots + a_1\beta + a_0 \mid a_k a_{k-1} \cdots a_1 a_0 0^\omega \text{ je přípustný}\}$$

Které konečné řetězce jsou přípustné?

$$10^\omega \text{ je přípustný} \quad \Longleftrightarrow \quad d(-\beta, l_\beta) \neq 10^{2k}1 * * * \cdots$$

V opačném případě $\mathbb{Z}_{-\beta} = \{0\}$.

Vlastnosti $(-\beta)$-celých čísel

$$\mathbb{Z}_{-\beta} := \{a_k\beta^k + \cdots + a_1\beta + a_0 \mid a_k a_{k-1} \cdots a_1 a_0 0^\omega \text{ je přípustný}\}$$

Které konečné řetězce jsou přípustné?

$$10^\omega \text{ je přípustný} \quad \Longleftrightarrow \quad d(-\beta, l_\beta) \neq 10^{2k}1 * * * \cdots$$

V opačném případě $\mathbb{Z}_{-\beta} = \{0\}$.

Je-li $\mathbb{Z}_{-\beta} \neq \{0\}$, pak je nekonečná a diskrétní.

Vlastnosti $(-\beta)$-celých čísel

$$\mathbb{Z}_{-\beta} := \{a_k\beta^k + \cdots + a_1\beta + a_0 \mid a_k a_{k-1}\cdots a_1 a_0 0^\omega \text{ je přípustný}\}$$

Které konečné řetězce jsou přípustné?

$$10^\omega \text{ je přípustný} \quad \Longleftrightarrow \quad d(-\beta, l_\beta) \neq 10^{2k}1 * * * \cdots$$

V opačném případě $\mathbb{Z}_{-\beta} = \{0\}$.

Je-li $\mathbb{Z}_{-\beta} \neq \{0\}$, pak je nekonečná a diskrétní.

Příklad: β minimální Pisotovo číslo, reálný kořen $x^3 = x + 1$.
$d(-\beta, l_\beta) = 1001^\omega$, a proto $\mathbb{Z}_{-\beta} = \{0\}$.

Vlastnosti $(-\beta)$-celých čísel

$$\mathbb{Z}_{-\beta} := \{a_k\beta^k + \cdots + a_1\beta + a_0 \mid a_k a_{k-1} \cdots a_1 a_0 0^\omega \text{ je přípustný}\}$$

Které konečné řetězce jsou přípustné?

$$10^\omega \text{ je přípustný} \quad \Longleftrightarrow \quad d(-\beta, l_\beta) \neq 10^{2k}1 * * * \cdots$$

V opačném případě $\mathbb{Z}_{-\beta} = \{0\}$.

Je-li $\mathbb{Z}_{-\beta} \neq \{0\}$, pak je nekonečná a diskrétní.

Příklad: β minimální Pisotovo číslo, reálný kořen $x^3 = x + 1$.
$d(-\beta, l_\beta) = 1001^\omega$, a proto $\mathbb{Z}_{-\beta} = \{0\}$.

Příklad: τ zlatý řez, tj. $\tau = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$.
$d(-\beta, l_\beta) = 10^\omega$, tj. $\mathbb{Z}_{-\beta}$ netriviální a navíc $\mathbb{Z}_{-\tau} = \mathbb{Z}_{\tau^2}$.

Vzdálenosti mezi $(-\beta)$-celými čísly

$\mathcal{S}(k) =$ množina přípustných řetězců tvaru $a_{k-1}\cdots a_0 0^\omega$.

Extremální řetězce (vzhledem k $\preceq_{\mathsf{alt}}$):

$$\begin{array}{ll} \mathrm{Max}(k) & \text{maximální v } \mathcal{S}(k), \\ \mathrm{Min}(k) & \text{minimální v } \mathcal{S}(k). \end{array}$$

Vzdálenosti mezi $(-\beta)$-celými čísly

$\mathcal{S}(k) =$ množina přípustných řetězců tvaru $a_{k-1}\cdots a_0 0^\omega$.

Extremální řetězce (vzhledem k $\preceq_{\text{alt}}$):

$$\begin{array}{ll} \mathrm{Max}(k) & \text{maximální v } \mathcal{S}(k), \\ \mathrm{Min}(k) & \text{minimální v } \mathcal{S}(k). \end{array}$$

Sousedi v $\mathbb{Z}_{-\beta}$: $x = wd\mathrm{Min}(k), \quad y = w(d-1)\mathrm{Max}(\mathrm{k}).$

Vzdálenosti mezi $(-\beta)$-celými čísly

$$\mathcal{S}(k) = \text{množina přípustných řetězců tvaru} \quad a_{k-1}\cdots a_0 0^\omega \,.$$

Extremální řetězce (vzhledem k $\preceq_{\text{alt}}$):

$$\begin{array}{ll} \mathrm{Max}(k) & \text{maximální v } \mathcal{S}(k), \\ \mathrm{Min}(k) & \text{minimální v } \mathcal{S}(k). \end{array}$$

Sousedi v $\mathbb{Z}_{-\beta}$: $\quad x = wd\mathrm{Min}(k), \quad y = w(d-1)\mathrm{Max}(\mathrm{k}).$

Když k sudé, pak

$$x > y \quad \text{a} \quad x - y = \beta^k + \gamma\big(\mathrm{Min}(k)\big) - \gamma\big(\mathrm{Max}(k)\big)\,.$$

Když k liché, pak

$$x < y \quad \text{a} \quad y - x = \beta^k + \gamma\big(\mathrm{Max}(k)\big) - \gamma\big(\mathrm{Min}(k)\big)\,.$$

Vzdálenosti mezi $(-\beta)$-celými čísly

Zjednodušující předpoklad:

$$d(-\beta, l_\beta) = d_1 d_2 d_3 \cdots, \qquad \text{kde } 0 < d_i < d_1 \text{ pro } i = 2, 3, 4, \ldots.$$

Vzdálenosti mezi $(-\beta)$-celými čísly

Zjednodušující předpoklad:

$$d(-\beta, l_\beta) = d_1 d_2 d_3 \cdots, \qquad \text{kde } 0 < d_i < d_1 \text{ pro } i = 2, 3, 4, \ldots .$$

Pak

$$\begin{aligned} \mathrm{Min}(2k) &= d_1 d_2 d_3 \cdots d_{2k-1} d_{2k}\,, \\ \mathrm{Max}(2k) &= 0 d_1 d_2 d_3 \cdots d_{2k-2}(d_{2k-1} - 1)\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Min}(2k+1) &= d_1 d_2 d_3 \cdots d_{2k}(d_{2k+1} - 1)\,, \\ \mathrm{Max}(2k+1) &= 0 d_1 d_2 d_3 \cdots d_{2k-1} d_{2k}\,. \end{aligned}$$

Vzdálenosti mezi $(-\beta)$-celými čísly

Zjednodušující předpoklad:

$$d(-\beta, l_\beta) = d_1 d_2 d_3 \cdots \,, \qquad \text{kde } 0 < d_i < d_1 \text{ pro } i = 2, 3, 4, \ldots.$$

Pak

$$\begin{aligned}
\mathrm{Min}(2k) &= d_1 d_2 d_3 \cdots d_{2k-1} d_{2k}\,, \\
\mathrm{Max}(2k) &= 0 d_1 d_2 d_3 \cdots d_{2k-2}(d_{2k-1} - 1)\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Min}(2k+1) &= d_1 d_2 d_3 \cdots d_{2k}(d_{2k+1} - 1)\,, \\
\mathrm{Max}(2k+1) &= 0 d_1 d_2 d_3 \cdots d_{2k-1} d_{2k}\,.
\end{aligned}$$

Vzdálenosti v $\mathbb{Z}_{-\beta}$ jsou

$$\Delta_0 = 1\,, \qquad \Delta_k = \left| (-1)^k + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_{k-1+i} - d_{k+i}}{(-\beta)^i} \right|, \quad k \geq 1.$$

Otevřené otázky

- Kdy je $\mathbb{Z}_{-\beta}$ uniformně diskrétní a relativně hustá?

  Kdy $\exists\, r, R > 0$ tak, že $r \leq \Delta_i \leq R$.

Otevřené otázky

- Kdy je $\mathbb{Z}_{-\beta}$ uniformně diskrétní a relativně hustá?

  Kdy $\exists\, r, R > 0$ tak, že $r \leq \Delta_i \leq R$.

- Kdy je $\mathbb{Z}_{-\beta} = \mathbb{Z}_\gamma$ pro nějaké γ?

  Nutně stejné mezery, tj. $\Delta_i \leq 1$.

Otevřené otázky

- Kdy je $\mathbb{Z}_{-\beta}$ uniformně diskrétní a relativně hustá?

  Kdy $\exists\, r, R > 0$ tak, že $r \leq \Delta_i \leq R$.

- Kdy je $\mathbb{Z}_{-\beta} = \mathbb{Z}_{\gamma}$ pro nějaké γ?

  Nutně stejné mezery, tj. $\Delta_i \leq 1$.

- Invariance na substituce obecně?

  Na příkladech funguje.

Otevřené otázky

- Kdy je $\mathbb{Z}_{-\beta}$ uniformně diskrétní a relativně hustá?

  Kdy $\exists\, r, R > 0$ tak, že $r \leq \Delta_i \leq R$.

- Kdy je $\mathbb{Z}_{-\beta} = \mathbb{Z}_{\gamma}$ pro nějaké γ?

  Nutně stejné mezery, tj. $\Delta_i \leq 1$.

- Invariance na substituce obecně?

  Na příkladech funguje.

- Aritmetické otázky
  - Kdy konečné rozvoje uzavřené na sčítání?
  - Je uzavřenost na $+$ stejná jako na $\pm$?
  - Odhady na počty zlomkových míst

Děkuji za pozornost.