Číselné soustavy s neceločíselnou bází

Zuzana Masáková, 24. února 2010

- β-rozvoj pomocí hladového algoritmu
- Přípustnost cifer v β-rozvoji
- β-celá čísla: geometrie a kombinatorika
- Aritmetika v β-rozvojích

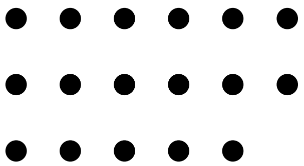
Poziční číselné soustavy

desítková dvojková

$$\pi = 3.141592653589\cdots = 11.001001000011111\cdots$$

$$\pi = 3\cdot 10^0 + \frac{1}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{5}{10^4} + \cdots = 2^1 + 2^0 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^{11}} + \cdots$$

Hladový algoritmus:



$$17 = 1\cdot 3^2 + 2\cdot 3^1 + 2\cdot 3^0 = (122)_3$$

Při základu $q \in \mathbb{Z}$, $q \geq 2$:

Najdi k tak, aby $q^k \leq x < q^{k+1}$, polož $x_k = \left[\frac{x}{q^k}\right]$. Totéž pro $x - x_k q^k$.

β-rozvoje, $\beta > 1$

Každé číslo $x > 0$ lze vyjádřit ve tvaru

$$x = \sum_{i=-\infty}^{k} x_i \beta^i = x_k \beta^k + \cdots + x_1 \beta + x_0 + \frac{x_{-1}}{\beta} + \frac{x_{-2}}{\beta^2} + \cdots \,,$$

symbolicky $\qquad (x)_\beta = x_k x_{k-1} \cdots x_1 x_0 \bullet x_{-1} x_{-2} \cdots$

Cifry x_i získáme pomocí β-transformace $\quad T_\beta : [0,1) \to [0,1)$

$$T_\beta(x) := \beta x - [\beta x] = \{\beta x\}\,.$$

$$x \in [0,1) \implies x_i = \left[\beta T_\beta^{-i-1}(x)\right], \quad \text{pro } i \le -1,$$

$$x \ge 1 \implies \text{najdi } k \text{ tak, že } \beta^k \le x < \beta^{k+1}, \text{ pak } x_i = \left[\beta T_\beta^{k-i}\big(\tfrac{x}{\beta^{k+1}}\big)\right], \text{ pro } i \le k.$$

Cifry $\qquad x_i \in \{0, 1, 2, \ldots, \lceil \beta \rceil - 1\}$

Přípustné posloupnosti cifer

$\beta \in \mathbb{Z}$: všechny posloupnosti přípustné, kromě těch, které končí na $(\beta-1)^\omega$;
např. $1 = 0.9999\cdots$

$\beta \notin \mathbb{Z}$: některé posloupnosti cifer $x_i \in \{0,1,2,\ldots,\lceil\beta\rceil-1\}$ nemohou být hladovým rozvojem;
např. **zlatý řez** $\tau = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) = 1.618\cdots$, kořen $x^2 = x+1$.

Rényiův rozvoj jedničky $d_\beta(1)$

$$d_\beta(1) = t_1 t_2 t_3 \cdots\ , \qquad \text{kde}\ \ t_i = \left[\beta T_\beta^{i-1}(1)\right]\ , \qquad \text{tj.}\ \ 1 = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{t_i}{\beta^i}\,,$$

a pomocné

$$d^*_\beta(1) = \begin{cases} d_\beta(1) & \text{když } d_\beta(1) \text{ je nekonečný,} \\ \big(t_1 t_2 \ldots t_{m-1}(t_m-1)\big)^\omega & \text{když } d_\beta(1) = t_1\cdots t_m. \end{cases}$$

Parryho podmínka

Věta (Parry)

$\sum_{i=-\infty}^{k} x_i\beta^i$, $x_i \in \mathbb{N}_0$, je β-rozvojem nějakého $x > 0$

$$\iff \quad x_j x_{j-1} x_{j-2} \cdots \prec d_\beta^*(1)\,, \quad \text{pro všechna } j \leq k\,,$$

kde $\prec$ je lexikografické uspořádání.

Příklad: zlatý řez τ

$$d_\tau(1) = 11, \ \Big(\text{odpovídá rovnosti } 1 = \frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau^2}\Big) \quad \Longrightarrow \quad d_\tau^*(1) = (10)^\omega$$

Podmínka $x_j x_{j-1} x_{j-2} \cdots \prec (10)^\omega$ znamená, že

τ-rozvoj $x_k x_{k-1} \cdots x_0 \bullet x_{-1} x_{-2} \cdots$

má pouze cifry 1 and 0, ($x_i \in \{0,1\}$)

neobsahuje 11, ($x_i x_j = 0$),

nekončí periodou $(10)^\omega$.

Více o Rényiově rozvoji jedničky

Věta (Parry) $(t_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $t_i \in \mathbb{N}_0$, je $d_\beta(1)$ pro nějaké $\beta > 1$

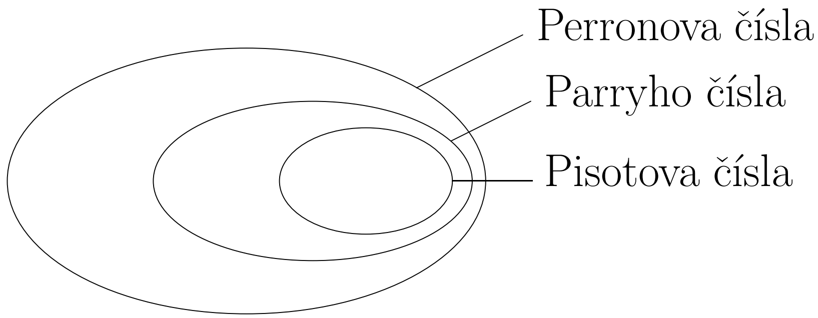
$$\Longleftrightarrow \quad t_j t_{j-1} t_{j-2} \cdots \prec t_1 t_2 t_3 \cdots\,, \text{ pro všechna } j \geq 2\,.$$

β takové, že $d_\beta(1)$ je posléze periodický nazýváme **Parryho číslo**.

$$d_\beta(1) = \begin{cases} t_1 t_2 \cdots t_m & \text{jednoduché Parryho číslo} \\ t_1 t_2 t_3 \cdots & \text{nejednoduché Parryho číslo} \end{cases}$$

Perronovo číslo:

$\beta > 1$ algebraické celé číslo, tj. kořen ired. polynomu $x^d + a_{d-1}x^{d-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, $a_i \in \mathbb{Z}$, takové, že ostatní kořeny $|\beta^{(j)}| < \beta$.

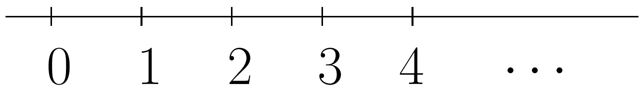


Pisotovo číslo:

$\beta > 1$ algebraické celé číslo
se sdruženými kořeny $|\beta^{(j)}| < 1$.

β-celá čísla $\qquad \mathbb{Z}_\beta := \left\{ \pm x \;\middle|\; x \geq 0,\ (x)_\beta = x_k x_{k-1} \ldots x_0,\ k \in \mathbb{N}_0 \right\}$

Geometrie množiny $\mathbb{Z}_\beta$: $\qquad \beta \in \mathbb{Z} \;:\quad \mathbb{Z}_\beta = \mathbb{Z}$

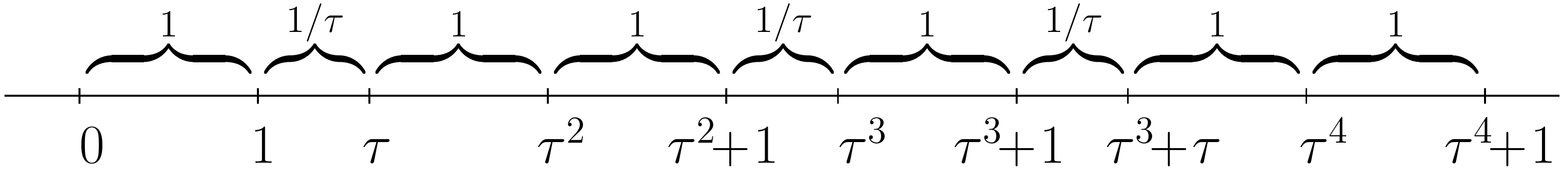


$\beta \notin \mathbb{Z} \;:\quad \mathbb{Z}_\beta \quad ???$

Příklad:

$$\mathbb{Z}_\tau = \left\{ \pm \sum_{i=0}^{k} x_i \tau^i \;\middle|\; x_i \in \{0,1\},\ x_i x_{i+1} = 0 \right\}$$

$$\mathbb{Z}_\tau = \pm\{0, 1, \tau, \tau^2, \tau^2+1, \tau^3, \tau^3+1, \tau^3+\tau, \tau^4, \tau^4+1, \ldots\}$$



x	$(x)_\tau$
0	0
1	1
τ	10
τ^2	100
τ^2+1	101
τ^3	1000
τ^3+1	1001
$\tau^3+\tau$	1010
τ^4	10000
τ^4+1	10001
$\vdots$	$\vdots$

Vzdálenosti mezi β-celými čísly

'Lexicografické' uspořádání β-rozvojů odpovídá přirozenému uspořádání v $\mathbb{R}$.

$$x > y \qquad \Longleftrightarrow \qquad (x)_\beta \text{ `}\succ\text{' } (y)_\beta$$

POZOR! $\quad (x)_\beta = x_k x_{k-1} \cdots x_0 \quad \text{`}\succ\text{'} \quad (y)_\beta = y_l y_{l-1} \cdots x_0,$

$$\text{když} \quad k \geq l \quad \text{a} \quad x_k x_{k-1} \cdots x_0 \succ \underbrace{00\cdots 0}_{(l-k)_{\text{times}}} y_l y_{l-1} \cdots y_0.$$

Sousedi $x > y$ v $\mathbb{Z}_\beta$ splňují

$$\begin{array}{rcccccccccc} (y)_\beta = x_k & x_{k-1} & \cdots & x_{i+1} & x_i & t_1 & t_2 & \cdots & t_i\,, \\ (x)_\beta = x_k & x_{k-1} & \cdots & x_{i+1} & (x_i{+}1) & 0 & 0 & \cdots & 0\,. \end{array}$$

Vzdálenost mezi x a y je

$$x - y = \begin{array}{r} 1\,0\,0\cdots0 \quad\quad\quad\quad \\ -t_1 t_2\cdots t_i \quad\quad\quad\quad \\ \hline t_1 t_2\cdots t_i \bullet t_{i+1} t_{i+2}\cdots \\ -t_1 t_2\cdots t_i \quad\quad\quad\quad \\ \hline 0\bullet t_{i+1} t_{i+2}\cdots \end{array}$$

Vzdálenosti mezi sousedy v $\mathbb{Z}_\beta$ nabývají hodnot

$$\Delta_i = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{t_{i+j}}{\beta^j} = 0 \bullet t_{i+1} t_{i+2} \cdots , \qquad i \geq 0 .$$

Počet vzdáleností konečný $\Leftrightarrow$ $d_\beta(1)$ je posléze periodický $\Leftrightarrow$ β je Parryho číslo.

Nechť $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ je rostoucí tak, že $\mathbb{Z}_\beta = \pm\{\, x_n \mid n \in \mathbb{N}_0 \,\}$. Pak definujeme

$$u_n = i \quad \text{když} \;\; x_{n+1} - x_n = \Delta_i , \qquad n \in \mathbb{N}_0.$$

Tedy $u_\beta = (u_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ je nekonečné slovo v abecedě

$$\mathcal{A} = \begin{cases} \{0, 1 \ldots, m-1\} & \text{když} \;\; d_\beta(1) = t_1 t_2 \cdots t_m , \\ \{0, 1 \ldots, m+p-1\} & \text{když} \;\; d_\beta(1) = t_1 t_2 \cdots t_m (t_{m+1} \cdots t_{m+p})^\omega , \end{cases}$$

Generování množiny $\mathbb{Z}_\beta$, resp. slova u_β

Když $x > y$ jsou sousedi v $\mathbb{Z}_\beta$ se vzdáleností $x - y = \Delta_i$, tj.

$$\begin{aligned}
(y)_\beta &= x_k \ x_{k-1} \ \cdots \ x_{i+1} \quad x_i \quad t_1 \ t_2 \ \cdots \ t_i \,,\\
(x)_\beta &= x_k \ x_{k-1} \ \cdots \ x_{i+1} (x_i{+}1)\ 0 \ \ 0 \ \cdots \ 0 \,,
\end{aligned}$$

pak mezi body βx a βy leží β-celá čísla

$$\begin{array}{rcl}
(\beta y)_\beta & = & x_k \ x_{k-1} \ \cdots \ x_{i+1} \quad x_i \quad t_1 \ t_2 \ \cdots \ t_i \quad 0 \,,\\
1 + (\beta y)_\beta & = & x_k \ x_{k-1} \ \cdots \ x_{i+1} \quad x_i \quad t_1 \ t_2 \ \cdots \ t_i \quad 1 \,,\\
1 + 1 + (\beta y)_\beta & = & x_k \ x_{k-1} \ \cdots \ x_{i+1} \quad x_i \quad t_1 \ t_2 \ \cdots \ t_i \quad 2 \,,\\
\vdots & & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots\\
1 + \cdots + 1 + (\beta y)_\beta & = & x_k \ x_{k-1} \ \cdots \ x_{i+1} \quad x_i \quad t_1 \ t_2 \ \cdots \ t_i \ t_{i+1} \,,\\
(\beta x)_\beta = \Delta_{i+1} + 1 + \cdots + 1 + (\beta y)_\beta & = & x_k \ x_{k-1} \ \cdots \ x_{i+1} (x_i{+}1)\ 0 \ \ 0 \ \cdots \ 0 \quad 0 \,,
\end{array}$$

Máme

$$\beta \Delta_i \ = \ \underbrace{\Delta_0 + \cdots + \Delta_0}_{t_{i+1} \text{ krát}} + \Delta_{i+1}$$

Na pořadí záleží!!!

Příklad: zlatý řez

OBRÁZEK

Pro nekonečné slovo u_β dostaneme substituci

pro $d_\beta(1) = t_1 t_2 \cdots t_m$:

$$\begin{array}{ccc} 0 & \mapsto & 0^{t_1}1 \\ 1 & \mapsto & 0^{t_2}2 \\ & \vdots & \\ m-2 & \mapsto & 0^{t_{m-1}}(m-1) \\ m-1 & \mapsto & 0^{t_m} \end{array}$$

pro $d_\beta(1) = t_1 \cdots t_m (t_{m+1} \cdots t_{m+p})^\omega$:

$$\begin{array}{ccc} 0 & \mapsto & 0^{t_1}1 \\ 1 & \mapsto & 0^{t_2}2 \\ \vdots & & \vdots \\ m+p-2 & \mapsto & 0^{t_{m+p-1}}(m+p-1) \\ m+p-1 & \mapsto & 0^{t_{m+p}}m \end{array}$$

Aritmetika v $\mathbb{Z}_\beta$

$\beta \in \mathbb{Z}$: $\quad \mathbb{Z}_\beta = \mathbb{Z}$ je okruh, $\quad \mathrm{Per}(\beta) = \mathbb{Q}$ je těleso, $\quad \mathrm{Fin}(\beta) \subset \mathbb{Q}$ je okruh;

$\beta \notin \mathbb{Z}$: $\quad \mathbb{Z}_\beta + \mathbb{Z}_\beta \not\subset \mathbb{Z}_\beta$, $\quad$ pro žádné $\beta \notin \mathbb{Z}$;

dk: $\quad \beta < t_1 + 1 < 2\beta \quad \Longrightarrow \quad (t_1+1)_\beta = 1x_0 \bullet x_{-1}x_{-2}\cdots \quad ;$

$$x_i = 0 \text{ pro } i < 0 \quad \Longrightarrow \quad t_1 + 1 - \beta = x_0 \in \mathbb{Z} \quad \Longrightarrow \quad \text{spor.}$$

Věta (Schmidt)

β je Pisotovo číslo $\quad \Longrightarrow \quad \mathrm{Per}(\beta) = \mathbb{Q}(\beta) = \{a_0 + a_1\beta + \cdots + a_{d-1}\beta^{d-1} \mid a_i \in \mathbb{Z}\}$,
kde d je řád čísla β.

$\mathrm{Per}(\beta) \supset \mathbb{Q} \quad \Longrightarrow \quad \beta$ je Pisotovo nebo Salemovo číslo.

Finiteness property - uzavřenost $\mathrm{Fin}(\beta)$ na $+$ a $\times$

Věta $\quad \mathrm{Fin}(\beta)$ je okruh $\quad\Longrightarrow\quad d_\beta(1)$ je konečný.

$$1-\frac{1}{\beta}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{t_i}{\beta^i}-\frac{1}{\beta}=\frac{t_1-1}{\beta}+\sum_{i=2}^{\infty}\frac{t_i}{\beta^i}\,,$$

i.e. pro $x=1$ a $y=-\beta^{-1}$ je

$$(x+y)_\beta = 0\bullet(t_1-1)t_2t_3\cdots$$

což je konečné $\iff$ $d_\beta(1)$ je konečný.

Věta (Frougny, Solomyak) $\quad \mathrm{Fin}(\beta)$ je okruh $\quad\Longrightarrow\quad \beta$ je Pisotovo číslo.

Existují různé postačující podmínky, ale:

Algebraický popis čísel β akových, že $\mathrm{Fin}(\beta)$ je okruh zůstává nevyřešen.

Počet zlomkových míst při aritmetických operacích

I když $\mathrm{Fin}(\beta)$ není okruh, lze definovat:

$$L_\oplus(\beta) := \min\{n \in \mathbb{N}_0 \mid \forall\, x, y \in \mathbb{Z}_\beta,\ x + y \in \mathrm{Fin}(\beta) \Rightarrow x + y \in \beta^{-n}\mathbb{Z}_\beta\}\,,$$

$$L_\otimes(\beta) := \min\{n \in \mathbb{N}_0 \mid \forall\, x, y \in \mathbb{Z}_\beta,\ xy \in \mathrm{Fin}(\beta) \Rightarrow xy \in \beta^{-n}\mathbb{Z}_\beta\}\,.$$

Příklad: zlatý řez $1 + 1 = 2 = \tau + \frac{1}{\tau^2}$, tj. $(1+1)_\beta = 10 \bullet 01$;

lze ukázat $L_\oplus(\tau) = L_\otimes(\tau) = 2$.

Věta (Bernat) β je Perronovo číslo $\Longrightarrow$ $L_\oplus(\beta), L_\otimes(\beta) < \infty$.

Komentáře

- Zobecňování:
  - balancované systémy se symetrickou množinou cifer
  - redundantní systémy
  - systémy se zápornou bází
- Využití:
  - přesná aritmetika v jisté třídě iracionálních čísel
  - zrychlování výpočtů (reprezentace s minimem nenulových cifer, paralelizace operací v redundantních systémech)
- Mnoho otevřených otázek (algoritmy pro aritmetiku a jejich složitost, atd.)