1. Dokažte, že sblížené zlomky iracionálního čísla jsou jeho nejlepšími racionálními aproximacemi.

2. Dokažte, že pro každé číslo $\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ existuje nekonečně mnoho zlomků $\frac{p}{q}$ splňujících $\left|\xi - \frac{p}{q}\right| < 1/2q^2$. Vyslovte větu, která říká, jak nejvíce lze toto tvrzení vylepšit.

3. Dokažte, že zlomek $\frac{p}{q}$, který splňuje $\left|\xi - \frac{p}{q}\right| < 1/2q^2$ pro $\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, je sblíženým zlomkem čísla ξ.

4. Vyslovte a dokažte Liouvillovu větu o aproximovatelnosti algebraického čísla řádu d.

5. Definujte Liouvillovo číslo, dejte příklad takového čísla a dokažte, že je Liouvillovo.

6. Dokažte, že každé reálné číslo lze zapsat jako součet dvou Liouvillových čísel.

7. Vyslovte Lagrangeovu větu o řetězovém zlomku kvadratických čísel a dokažte jednu z implikací. Najděte minimální polynom algebraického čísla s konkrétně zadaným periodickým řetězovým zlomkem.

8. Vyslovte tvrzení charakterizující čísla s čistě periodickým řetězovým zlomkem a dokažte jednu z implikací. Uveďte příklad takového čísla v tělese $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$.

9. Odvoďte tvar integrální báze okruhu celých čísel v kvadratických tělesech $K = \mathbb{Q}(\sqrt{m})$, kde $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$ a neobsahuje čtverec. Vypočítejte diskriminant tělesa K.

10. Je-li K číselné těleso, napište, jak lze charakterizovat jednotky v okruhu $\mathcal{O}_K$ pomocí normy, a tvrzení dokažte. Popište jednotky v okruzích celých čísel imaginárních kvadratických těles.

11. Dokažte, že okruh celých čísel $\mathcal{O}_K$ v tělese $K = \mathbb{Q}(\sqrt{m})$ pro $m = -1, -2, -3, -7, -11, 2, 3, 5, 13$ je eukleidovský okruh.

12. Definujte zkonstruovatelné číslo a dokažte, že když α je zkonstruovatelné, pak α je algebraické stupně 2^r, kde $r \in \mathbb{N}$.

13. Doplňte tvrzení: Pravidelný n-úhelník lze zkonstruovat, právě když n je tvaru .... Dokažte jednu z implikací.

14. Nechť K je číselné těleso stupně n. Definujte diskriminant souboru čísel v K a dokažte, že $\beta_1, \dots, \beta_n \in K$ tvoří bázi tělesa K jako vektorového prostoru nad $\mathbb{Q}$, právě když $\Delta(\beta_1, \dots, \beta_n) \neq 0$.

15. Nechť K je číselné těleso stupně n. Dokažte, že diskriminanty dvou integrálních bází $\mathcal{O}_K$ jsou shodné.

16. Dokažte, že existuje integrální báze okruhu celých čísel tělesa $\mathbb{Q}(\alpha)$ pro $\alpha \in \mathbb{A}$.

17. Vysvětlete algoritmus hledání integrální báze okruhu celých čísel tělesa $\mathbb{Q}(\alpha)$. Vyslovte tvrzení, na kterém je algoritmus založen.

18. Dokažte, že okruh $\mathcal{O}_K$ celých čísel číselného tělesa K je okruh s jednoznačnou faktorizací, právě když každý ireducibilní prvek v $\mathcal{O}_K$ je prvočíslo v $\mathcal{O}_K$.

19. Definujte algebraické celé číslo. S pomocí Gaussova lemmatu dokažte, že jeho minimální polynom má celočíselné koeficienty.

20. Definujte symetrický polynom v n proměnných. Vyslovte a dokažte hlavní větu o symetrických polynomech.

21. Definujte tělesový polynom čísla β v tělese $\mathbb{Q}(\alpha)$ a dokažte, že je mocninou minimálního polynomu čísla β. Co to implikuje o stupni čísla β?

22. Definujte n-tý cyklotomický polynom Φ_n, určete jeho stupeň a dokažte, že $\Phi_n \in \mathbb{Z}[x]$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Napište, jak vypadá p-tý cyklotomický polynom Φ_p pro p prvočíslo a pomocí Eisensteinova kritéria dokažte, že je ireducibilní nad $\mathbb{Q}$.

23. Definujte kvadratické reziduum $\mod p$ a pro p prvočíslo určete počet kvadratických reziduí. Vyslovte a dokažte větu, která charakterizuje prvočíslo p, pro které je -1 kvadratické reziduum $\mod p$.

24. Dokažte, že prvočíslo tvaru $p = 4k + 1$ lze napsat jako součet dvou čtverců. Vysvětlete, proč prvočísla tvaru $p = 4k + 3$ takto zapsat nelze.

25. Popište všechna $n \in \mathbb{N}$, která lze napsat jako součet $a^2 + b^2$, kde $a, b \in \mathbb{Z}$ a popište postup, jak a a b najít.

26. Formulujte a dokažte nutnou a postačující podmínku pro existenci řešení $(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{Z}^k$ lineární diofantické rovnice $\sum_{j=1}^{k} a_k x_k = b$.

27. Vyslovte a dokažte tvrzení o pythagorejských trojicích.