

1. Je dáno $\frac{r}{s}$ a $\varepsilon > 0$. Dokažte, že když

$$0 < \left| \frac{r}{s} - \frac{p}{q} \right| < \varepsilon$$

pro nějaký zlomek $\frac{p}{q}$, pak q musí být dostatečně velké. Jak?

2. Definujeme $\|x\| = \min\{|x - n| \mid n \in \mathbb{Z}\}$, vzdálenost čísla x k nejbližšímu celému číslu. Dokažte, že $\|\alpha + \beta\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\|$, $\|n\alpha\| \leq |n|\|\alpha\|$. Najděte vyjádření pro $\|\alpha\|$ pomocí zlomkové části $\{\alpha\} = \alpha - \lfloor \alpha \rfloor$.
3. Nechť $\frac{p}{q} < \frac{r}{s}$ splňují $rq - ps = 1$. Dokažte, že racionální číslo $\frac{a}{b}$ splňuje $\frac{p}{q} \leq \frac{a}{b} \leq \frac{r}{s}$, právě když existují nezáporná celá čísla λ, μ tak, že

$$a = \lambda p + \mu r \quad \text{a} \quad b = \lambda q + \mu s.$$

4. Dokažte, že zlomky z $\mathcal{F}_{n+1}$ nepatřící do $\mathcal{F}_n$ jsou medianem po sobě jdoucích prvků $\mathcal{F}_n$. Platí to i naopak?
5. Najděte pravého souseda zlomku $\frac{5}{8}$ v $\mathcal{F}_{30}$.
6. * Sestavte algoritmus generování posloupnosti Fareyových zlomků řádu n vzestupně, resp. sestupně.
7. Dokažte, že

$$\frac{p_n}{q_n}, \frac{p_n + p_{n+1}}{q_n + q_{n+1}}, \frac{p_n + 2p_{n+1}}{q_n + 2q_{n+1}}, \dots, \frac{p_n + a_{n+2}p_{n+1}}{q_n + a_{n+2}q_{n+1}} = \frac{p_{n+2}}{q_{n+2}}$$

je monotónní posloupnost.

8. Dokažte, že α je iracionální, právě když množina hodnot posloupnosti $(\{n\alpha\})_{n \geq 1}$ je hustá v intervalu $(0, 1)$.
9. Nechť $a, b \in \mathbb{N}$. Vyjádřete číslo

$$\frac{2a^2b + a^2 + ab + 2a + 1}{2ab + a + 2}$$

ve tvaru řetězového zlomku.

10. Nechť $\frac{p_n}{q_n}$ je n -tý sblížený zlomek k $\alpha = [a_0, a_1, \dots, a_n, \dots]$ a $a_0 > 0$. Dokažte, že

$$[a_n, a_{n-1}, \dots, a_0] = \frac{p_n}{p_{n-1}} \quad \text{a} \quad [a_n, a_{n-1}, \dots, a_1] = \frac{q_n}{q_{n-1}}.$$

11. Vypočítej hodnotu čísla

$$\frac{e-1}{e+1} = [0, 2, 6, 10, 14, 18, \dots]$$

s přesností na 8 desetinných míst.

12. Nechť $\alpha = [a_0, a_1, a_2, \dots]$ a $\beta = [b_0, b_1, b_2, \dots]$. Dokažte, že $\alpha < \beta$, právě když $a_0a_1a_2 \cdots \prec b_0b_1b_2 \cdots$, kde uspořádání $\preceq$ definujeme takto: píšeme, že $a_0a_1a_2 \cdots \prec b_0b_1b_2 \cdots$, když pro první index j takový, že $a_j \neq b_j$, platí $(-1)^j(b_j - a_j) > 0$.
13. * Dokažte, že $\frac{p}{q} = [b_0, \dots, b_k]$ leží mezi $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = [a_0, \dots, a_{n-1}]$ a $\frac{p_n}{q_n} = [a_0, \dots, a_{n-1}, a_n]$, právě když $k \geq n$ a platí $b_i = a_i$, $i \leq n-1$, a $b_n \geq a_n$. Odtud dokažte, že pokud nějaké racionální číslo $\frac{p}{q}$ splňuje

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{p_n}{q_n},$$

kde $\frac{p_n}{q_n}$ je sblížený zlomek k číslu α , pak nutně $q > q_n$.

14. * Dokažte, že řetězový zlomek $e^{1/k}$ je $[1, (k-1), 1, 1, (3k-1), 1, 1, (5k-1), 1, 1, (7k-1), 1, 1, \dots]$.

- Vypočítejte p_0, p_3, q_0, q_3 výše uvedeného řetězového zlomku jako v závislosti na k .
- Vytvořte rekurenci pro čitatele a jmenovatele sblížených zlomků s členy r_{3n} vyjádřenými pomocí r_{3n-3} a r_{3n-6} . Koeficienty v rekurenci jsou polynomy v n a k .

- Definujte posloupnost reálných čísel

$$T_n(k) = \frac{1}{k^n} \int_0^{1/k} \frac{(kt)^n (kt-1)^n}{n!} e^t dt.$$

Ověřte, že $T_0(k) = q_0 e^{1/k} - p_0$, $T_1(k) = q_3 e^{1/k} - p_3$. Dvojnásobným použitím per partes ověřte, že $T_n(k)$, $T_{n-1}(k)$ a $T_{n-2}(k)$ splňují pro $n \geq 2$ rekurenci vytvořenou výše.

15. * Dokažte, že

$$e = 2 + \frac{2}{2 + \frac{3}{3 + \frac{4}{4 + \frac{5}{5 + \ddots}}}}$$

ve smyslu konvergence „useknutých“ zlomků, ozn. $\frac{p_n}{q_n}$.

- Dokažte, že „useknutý“ zlomek

$$a_0 + \frac{b_1}{a_1 + \frac{b_2}{a_2 + \frac{b_3}{a_3 + \frac{b_4}{a_4 + \frac{b_5}{a_5 + \ddots}}}}} = z_n$$

lze zapsat $z_n = \frac{p_n}{q_n}$, kde čitatele p_n a jmenovatele q_n splňují rekurenci

$$p_n = a_n p_{n-1} + b_n p_{n-2}, \quad q_n = a_n q_{n-1} + b_n q_{n-2}.$$

- Odvoďte, že pro $a_i, b_i \in \mathbb{N}$ platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \right) = 0.$$

- Dokažte že

$$\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{c_1 \cdots c_k} = \frac{1}{c_1 + \frac{c_1}{c_2 - 1 + \frac{c_2}{c_3 - 1 + \frac{c_3}{c_{n-1} + \frac{c_{n-1}}{c_n - 1}}}}}$$

- S použitím $1 - \frac{1}{e} = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{n!}$ a předchozího odvoďte výsledek.

16. Je-li q_n jmenovatel n -tého sblíženého zlomku čísla $\xi = [0, a_1, a_2, \dots]$, dokažte, že

$$q_n = \det \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ -1 & a_2 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & -1 & a_3 & 1 & \cdots \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & a_n \end{pmatrix}$$

17. * Necht $a_0, \dots, a_l$ jsou přirozená čísla. Označme $\alpha^{(i)} = [a_i, a_{i+1}, \dots, a_l, a_0, \dots, a_{i-1}]$. Dokažte, že číslo $\alpha = \alpha^{(0)} \alpha^{(1)} \cdots \alpha^{(l)}$ je algebraická jednotka. Dokažte alespoň pro $l = 2$.

(Algebraická jednotka je číslo $\alpha \in \mathbb{C}$, které je kořenem polynomu f s celočíselnými koeficienty, přičemž koeficient u nejvyšší a nejnižší mocniny x je roven ± 1 , tj. $f(\alpha) = 0$ pro nějaký $f(x) = x^d + \sum_{i=1}^{d-1} a_i x^i \pm 1$, $a_i \in \mathbb{Z}$.)

18. * Ukažte, že řetězové zlomky $\alpha = [a_0, a_1, a_2, \dots]$, $\beta = [b_0, b_1, b_2, \dots]$ čísel $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ jsou od jistého členu shodné, právě když

$$\alpha = \frac{c\beta + d}{e\beta + f}, \quad \text{kde } \det \begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix} = \pm 1. \quad (1)$$

(Od jistého členu shodné znamená, že existuje $l \in \mathbb{Z}$ a $k_0 \in \mathbb{N}_0$ tak, že $a_k = b_{k+l}$ pro všechna $k \geq k_0$.) Číslům α, β pak říkáme, že jsou ekvivalentní.

- Najděte generátory G_1, G_2, G_3 grupy matic

$$\text{Sl}(2, \mathbb{Z}) = \left\{ A = \begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix} \mid \det A = \pm 1 \right\}.$$

- Zkoumejte vztah (1) v případě $\begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix} = G_i$.

19. * Markovova konstanta $\mu(\alpha)$ pro číslo $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ je rovna $\frac{1}{C}$, kde C je maximální takové, že

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{Cq^2},$$

tj. $\mu(\alpha) = \liminf_{q \rightarrow \infty} q \|\alpha q\|$, kde $\|y\|$ označuje vzdálenost y k nejbližšímu celému číslu. Hurwitzova věta říká, že $\mu(\alpha) \leq \sqrt{5}^{-1}$ pro každé $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Dokažte, že $\mu(\alpha) = \sqrt{5}^{-1}$, právě když α je ekvivalentní zlatému řezu $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$.

Najděte C tak, aby Markovova konstanta každého čísla $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, které není ekvivalentní zlatému řezu, splňovala $\mu(\alpha) \leq C$.

20. * O čísle $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ řekneme, že je špatně aproximovatelné, jestliže existuje C tak, že

$$\frac{c}{q^2} < \left| \alpha - \frac{p}{q} \right|,$$

pro každé racionální číslo $\frac{p}{q}$. Dokažte, že iracionální číslo α je špatně aproximovatelné, právě když jsou koeficienty jeho řetězového zlomku omezené.

21. * Existují špatně aproximovatelná transcendentní čísla? Pokud ano, vysvětli proč. Pokud ne, vysvětli proč.

22. * Předpokládejme, že pro $\alpha = [a_0, a_1, a_2, \dots]$ existuje podposloupnost (a_{n_i}) posloupnosti (a_n) , která rychle roste, $a_{n_i} \geq q_{n_i-1}^{n_i}$. Dokažte, že α je transcendentní.

23. * Dokažte následující: Je-li $a_0 = 0$ a $a_n = \prod_{i=0}^{n-1} (1 + a_i)$, pak $\alpha = [a_0, a_1, \dots]$ je transcendentní.

(Použijte větu, kterou nedokazujeme: Jestliže pro $\alpha = [a_0, a_1, a_2, \dots]$ existuje $\varepsilon > 0$ a podposloupnost (a_{n_i}) posloupnosti (a_n) taková, že $a_{n_i} \geq q_{n_i-1}^\varepsilon$, pak α je transcendentní.)

24. * Nechť $m, n \in \mathbb{Z}$, $n > 0$, $\sqrt[3]{n} \notin \mathbb{Q}$. Dokažte, že $x^3 - ny^3 = m$ má jen konečně mnoho řešení $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$. (Využijte Rothovu větu - ve skriptech.)

25. * Dokažte, že pro každé $m \in \mathbb{Z}$ rovnice $x^3 - 2y^3 = m$ má jen konečně mnoho řešení $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$. Najděte explicitní odhady na velikost x, y .

(Využijte větu, kterou nedokazujeme: Pro všechna racionální $\frac{p}{q}$ platí $\frac{10^{-6}}{q^{2.955}} < \left| \sqrt[3]{2} - \frac{p}{q} \right|$.)

26. * S pomocí věty 6.31 ze skript vyslovte a dokažte tvrzení, popisující všechna řešení zobecněné Pellovy rovnice $x^2 - my^2 = B$, kde $|B| < \sqrt{m}$.

- Dokažte, že každé reálné číslo ξ , které je kořenem polynomu s celočíselnými koeficienty, lze napsat ve tvaru

$$\xi = \frac{R + \sqrt{m}}{S}, \quad R, S, m \in \mathbb{Z}, \quad m > 0, \quad m \text{ není čtverec přirozeného čísla a } S \mid (m - R^2).$$

- Dokažte, že pro takové ξ máme z algoritmu pro řetězové zlomky

$$\xi_n = \frac{R_n + \sqrt{m}}{S_n}, \quad a_n = \lfloor \xi_n \rfloor,$$

kde R_n, S_n jsou celá čísla, $S_n \neq 0$, definovaná rekurencemi

$$R_0 = R, \quad S_0 = S, \quad R_{n+1} = a_n S_n - R_n, \quad S_{n+1} = \frac{m - R_{n+1}^2}{S_n}.$$

Navíc $S_n | (m - R_n^2)$ pro každé n .

- Dokažte, že když $\frac{p_n}{q_n}$ jsou sblížené zlomky k číslu $\sqrt{m}$, pak $p_n^2 - m q_n^2 = (-1)^{n+1} S_{n+1}$.

27. Popište, která triangulární čísla ($T_n = \frac{n(n+1)}{2}$) jsou rovna nějakému čtverci m^2 . (Převeďte na řešení Pellovy rovnice.)

28. Určete, pro která n existuje m tak, že

$$1 + 2 + \cdots + m = (m+1) + (m+2) + \cdots + n.$$

(Převeďte na řešení Pellovy rovnice.)

29. Pythagorejská trojice je trojice $(x, y, z) \in \mathbb{N}$ taková, že $x^2 + y^2 = z^2$, např. $(3, 4, 5)$. Najděte alespoň 3 další Pythagorejské trojice takové, že $y = x + 1$. (Převeďte na řešení Pellovy rovnice.)