1. Najděte kubický polynom v $\mathbb{Z}[x]$, jehož kořenem je $\alpha = \zeta + \zeta^{-1}$, kde $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{7}}$.
2. Dokažte, že $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ je iracionální číslo.
3. Nechť $f \in \mathbb{Q}[x]$ je polynom s rac. koeficienty. Ukažte, že existuje polynom $g \in \mathbb{Q}[x]$, $g \neq 0$, tak, že $f(x)g(x) = a_2x^2 + a_3x^3 + a_5x^5 + \cdots + a_px^p$ je polynom, ve kterém jsou nenulové koeficienty pouze u mocnin s prvočíselným exponentem.
4. Nechť $f(x) = x^5 - 8x^3 + 9x - 3$, $g(x) = x^4 - 5x^2 - 6x + 3$. Dokažte, že existuje $d \in \mathbb{Z}$ tak, že polynomy f, g mají společný kořen v $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$.
5. Dokažte, že polynom $x^4 + x + 1$ je ireducibilní nad $\mathbb{Q}$.
6. Dokažte, že polynom $x^4 + x^3 + x^2 + 6x + 1$ je ireducibilní nad $\mathbb{Q}$.
7. Dokažte, že $\mathbb{R}[x]_{|(x^2+x+1)}$ je izomorfní tělesu $\mathbb{R}[x]_{|(x^2+1)}$ (tj. také $\mathbb{C}$). Dokažte, že polynomy v $\mathbb{R}[x]$ ireducibilní nad $\mathbb{R}$ jsou nanejvýš druhého stupně. Dokažte, že je-li f takový polynom, pak $\mathbb{R}[x]_{|f}$ je izomorfní $\mathbb{C}$.
8. Pro dané $\theta \in \mathbb{R}$ dokažte, že těleso $K = \mathbb{Q}(\sin \frac{\theta}{3})$ je rozšířením tělesa $L = \mathbb{Q}(\sin \theta)$. Jaká může být dimenze $[K : L]$ tělesa K jako vektorového prostoru nad L v závislosti na θ?
9. Najděte sdružené kořeny k číslu $\cos \frac{2\pi}{5}$.
10. Najděte algebraická čísla β, γ tak, aby
$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i) = \mathbb{Q}(\beta)\,, \quad \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3}, \sqrt{2} - \sqrt{5}) = \mathbb{Q}(\gamma)\,.$$
11. Najděte všechna racionální $\alpha \in [0, \frac{1}{2}]$ tak, že $\sin^2(\pi\alpha) \in \mathbb{Q}$.
    - Dokažte, že polynomy $g_m(x) = \sum_{j=0}^{m} b_jx^j \in \mathbb{Z}[x]$ definované rekurentně $g_1(x) = x$, $g_2(x) = 2x^2 - 1$, $g_{m+1}(x) = 2xg_m(x) - g_{m-1}(x)$ splňují
        (i) $\cos(m\varphi) = g_m(\cos\varphi)$
        (ii) $b_m = 2^{m-1}$
        (iii) $2^{j-1} \mid b_j$ pro $k \in \{2, 3, \ldots, m\}$.
    - Odvoďte, že $2\cos(\pi\alpha)$ je algebraické celé pro $\alpha \in \mathbb{Q}$.
    - Určete, pro které racionální $\alpha \in [0, \frac{1}{2}]$ je $2\cos(\pi\alpha)$ racionální.
    - Využijte vztahu mezi sin a cos k odvození výsledku.
12. Popište všechna $\theta \in \mathbb{Q} \cap [0, \frac{1}{2}]$ taková, že $\cos^2(\pi\theta) \in \mathbb{Q}$.
13. Dokažte, že $\sin(1°)$ je algebraické iracionální.
14. Nechť K je těleso konečného stupně nad $\mathbb{Q}$. Dokažte, že K obsahuje pouze konečně mnoho kořenů z jedničky.
15. Nechť K je algebraické číselné těleso lichého stupně nad $\mathbb{Q}$. Dokažte, že v jediné kořeny jedničky, které leží v K jsou ± 1.
16. Nechť $P(z)$ je polynom stupně $< k$ s komplexními koeficienty. Nechť $\omega_1, \ldots \omega_k$ jsou k-té kořeny z jedničky. Dokažte, že
$$\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} P(\omega_i) = P(0).$$
17. Nechť $p_0 = n$ a $p_k = x_1^k + \cdots x_n^k$ pro $k \geq 1$. Dokažte Newtonovy formule, tj.
    - Pro $k \leq n$ je
$$p_k - p_{k-1}e_1 + p_{k-2}e_2 - \cdots + (-1)^{k-1}p_1e_{k-1} + (-1)^k ke_k = 0;$$
    - pro $k > n$ je
$$p_k - p_{k-1}e_1 + p_{k-2}e_2 - \cdots + (-1)^n p_{k-n}e_n = 0;$$

kde e_k jsou elementární symetrické funkce v proměnných $x_1, \dots, x_n$.

18. Dokažte, že polynom Φ_n lze vyjádřit pomocí Möbiovy funkce

$$\Phi_n(x) = \prod_{d|n} (x^d - 1)^{\mu(n/d)} .$$

19. Nechť $f \in \mathbb{Z}[x]$ je monický polynom stupně ≥ 2 ireducibilní nad $\mathbb{Q}$ takový, že jeden z jeho kořenů je v absolutní hodnotě roven 1. Dokažte, že:
    - f je reciproký polynom, tj. jeho koeficienty tvoří palindrom;
    - f je sudého stupně;
    - má-li f reálné kořeny, pak pouze dva, a to β a $\frac{1}{\beta}$;
    - ostatní kořeny f leží na jednotkové kružnici.

20. Nechť ζ je primitivní osmý kořen z jedničky. Ukažte, že $\mathbb{Q}(\zeta)$ obsahuje právě 3 podtělesa stupně 2 nad $\mathbb{Q}$, a to $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{-2})$.

21. Dokažte, že algebraické celé číslo, jehož všechny sdružené kořeny jsou v absolutní hodnotě rovny 1, je kořen z jedničky. Najděte příklad algebraického čísla druhého stupně, které není kořenem z jedničky, i když ono i jeho sdružený kořen leží na jednotkové kružnici. (Pozn. Takové číslo nesmí být algebraické celé!)

22. Upevněme n, M. Je pravda, že algebraických celých čísel stupně $< m$ takových, že $|\alpha| < M$ je konečně mnoho? Dokažte, nebo vyvraťte protipříkladem.