



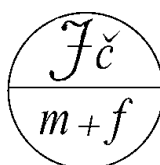
Hry ve vyučování matematice jako významná strategie vedoucí k rozvoji klíčových kompetencí žáků

**Alena Vávrová
Jarmila Novotná
Marta Volfová
Antonín Jančařík**

Studijní materiály k projektu
Podíl učitele matematiky ZŠ na tvorbě ŠVP
č. projektu: CZ.04.3.07/3.1.01.1/0137

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem, státní rozpočtem České republiky a rozpočtem hlavního města Prahy v rámci Jednotného programového dokumentu pro cíl 3

© JČMF 2006



SU
 Σ Společnost učitelů
matematiky JČMF
M A

Obsah

1. Úvahy o hrách
2. Jak hrát – úloha učitele
3. Hry s kartami
4. Hry s kostkami
5. Skládačky
6. Hry bez zvláštního zařazení
7. Matematické hry a jak je vyhrávat

Závěr

Použitá literatura

Příloha A Náměty na seminární práce

1. Úvahy o hrách

O hrách byla napsána řada publikací, vědeckých prací, každý se setkal s řadou názorů na hry. Přesto neuškodí některé teoretické aspekty her připomenout:

Hra je přirozeným projevem dětí, je pro ně životní potřebou, a to nejen v předškolním věku. Děti si hrají rády, hra je nezbytným průvodcem dětství, projevují při ní aktivitu, tvořivost a vlastní iniciativu. Dítě při hře napodobuje dospělé nejen v jejich činnosti, ale i v jejich projevech, utváří si postoje k životu. Hra je vždy aktivní, dynamický proces, zaměstnává duševní i tělesné schopnosti a ty prohlubuje a rozvíjí.

Potřeba hry přetrvává v nejrůznějších formách až do dospělosti. Ale zvláště v pubertálním věku, kterým se hlavně zabýváme, mají budoucí dospělí občas pocit, že hra je něco degradujícího, že je hraní vrací někam daleko zpět mezi malé děti. Proto je velmi důležité hrát s nimi různé typy her ještě před nástupem puberty a v kritickém období jen třeba pozměnit způsob hry nebo hodnocení. Překážkou občas bývají i sami učitelé, kteří nepovažují svůj předmět vhodný na „znesvěcení“ hrou. Setkáte se s rodiči, podle kterých se má ve škole učit = pracovat a hrát si dítě může doma. Bohužel, velice často na tento názor narazíte ve společnosti, setkáte se s ním v médiích. Přitom uspokojení, které přináší člověku tvůrčí práce, je plně srovnatelné s pocity, které přináší dítěti hra.

Každá hra, i taková, která by nedávala dětem víc než radost ze hry, je velmi důležitá.

U her můžeme vysledovat čtyři základní funkce:

1. Nejčastěji je připomínaná funkce MOTIVAČNÍ, kdy vnitřní potřeba účastnit se hry se mění na zájem o činnosti (matematické) s hrou spojené a případně i na zájem o matematiku vůbec. Někdy se zařazování her vyčítá, že se hojně uplatňují vnější nebo sociální motivy, ne ty vnitřní, kdy se žák učí, protože ho baví matematické činnosti, protože sám chce nalézat zákonitosti, sám se chce něco dozvědět, poznávat. Z počátku skutečně převažuje většinou vnější motivace, radostná účast ve hře, radost, že složil krabičku, našel cestu, že objevil dříve loď než jeho soupeř, že jeho skupina vyhrála

strana 2

atd. Uplatňování vnější motivace je třeba vždy zvažovat a promýšlet, jak a zda u žáka dojde k převaze vnitřní motivace. Z hlediska motivační funkce je též důležité, že při hře se většinou minimalizují negativně působící motivační činitelé, zejména nuda a strach.

Zdrojem nudy bývá – subjektivně vnímaná a prožívaná – jednotvárnost vyučování, čemuž aktivita při hře dobře zamezuje. Jiným zdrojem nudy by mohla být – opět subjektivně pocíťovaná – neužitečnost daného matematického celku. I v tomto případě může hra pomoci. Silně působí i reálné aplikační úlohy a zejména uplatnění projektů ve vyučování.

Motivaci všeobecně snižuje též strach (i když někdy – ve velmi mírné formě – ji může dočasně zvýšit).

2. Druhá důležitá funkce hry je **INSTRUMENTÁLNÍ** funkce, neboť cílem hry může být získávání určitých zkušeností při manipulacích s čísly či geometrickými objekty, nabývání vědomostí, dovedností nebo jejich fixace.

3. Hra má i třetí funkci – **DIAGNOSTICKOU**, kdy učitel nebo i sám žák může objevit, které poznatky dobře ovládá, které nejsou zcela osvojeny, které pojmy jsou neúplně či nesprávně chápány, kam žák dospěl ve svém rozvoji atp.

4. Čtvrtou funkcí je funkce **EXISTENCIÁLNÍ**, kde jde o rozvoj každého dítěte, uvědomování si a rozvíjení vlastní osobnosti, tvořivosti, přejímání určitých sociálních norem, o uvolňování tvořivých sil, rozvoj lidského potenciálu, skupinové citlivosti atp.

Hry dělíme na **spontánní** a **didaktické**, přičemž samozřejmě mezi skupinami není ostrá hranice.

Spontánní hra je taková činnost, jejíž motiv leží v ní samé a účast se řídí přáním dítěte.

Naproti tomu u **didaktické** hry je účast (téměř vždy) povinná, je určena požadavky učitele, který ji zařazuje do vyučování s tím, že zná její účel a význam, výchovně vzdělávací cíl, k jehož plnění má hra – třeba jen malým dílem – přispívat (a který žák nemusí znát). Pravidla i vlastní náplň hry mají být takové, aby činnost byla přijímána jako „opravdová hra“, aby se do ní děti s chutí spontánně zapojovaly. Hravý (herní) motiv zvyšuje aktivitu myšlení i koncentraci pozornosti, vyvolává plné zaujetí, radost a uspokojení. Největší úspěch didaktické hry je, když po ní děti sáhnou spontánně i mimo vyučovací hodinu.

Didaktické hry již dnes nejsou novinkou. Řada učitelů je zařazuje do svých vyučovacích hodin a potvrzuje, že jejich užíváním se vnáší do školy radost, zlepšuje se klima ve třídě, zvyšuje se motivace pro různá témata v matematice a zájem o ně. Pomáhají rozvíjet komunikační dovednosti žáků, zjišťovat a odstraňovat chybné představy z hlediska případných deformací a komunikačních šumů. Hraní s čísly či geometrickými objekty dává dostatečný prostor pro tvořivé zkoumání, zkoušení, případně i chybování i objevování. Také se při něm rozšiřuje zkušenostní obzor dětí. Při hře dochází k plnějšímu dotváření matematických pojmů.

Žáci se obvykle do těchto činností zapojují spontánně, nebojí se vyjadřovat své názory a představy. Byrne (1988) uvádí, že hry jsou stimulující, snadno žáky zaujmou a žáci se při nich vyjadřují bez jakýchkoli rozpaků a zábran. Pravidla a úkoly lze formulovat tak, aby učitel snáze diagnostikoval chybné představy. Často hra přináší komplexnější pohled na určitý problém, vyžaduje skloubení poznatků z různých částí matematiky nebo i dalších disciplín, působí proti atomizaci znalostí a přispívá k integritě poznání. Při hrách ve skupinách se rozvíjejí takové žákovské kompetence, jako je komunikace mezi členy týmu, schopnost obhajovat svůj nápad, vyslechnout názor druhého, rozdělit si práci, radovat se z objevu kamaráda a jiné sociální dovednosti.

Hra vede k rozvíjení tvořivých způsobů myšlení, ke zdravé soutěživosti. To však nejsou jediné pozitivní aspekty her. Hru lze využít např. při sledování vývoje osobnosti pro utváření

sebepojetí jako jádra osobnosti, při usměrňování a diferenciaci emocí, při uvolňování či vhodném vyrovnávání napětí. Hra může sloužit k navazování kontaktů, k modelování reálných situací, k přejímání sociálních norem při podřizování se obecným pravidlům hry. Při hře roste sebedůvěra, sebevědomí, důvěra ve spoluhráče (Millerová, S. Psychologie hry. Praha: Panorama, 1978), (Foltinová, K. - Novotná, J. Matematické hry a soutěže na druhém stupni základní školy. Praha: Pedagogické centrum, 1997).

Za zvlášť podstatné považujeme to, aby se každé dítě hry aktivně zúčastnilo a **každé bylo aspoň občas úspěšné**; u soutěživých her pak, aby buď ono samo nebo aspoň jeho družstvo někdy zvítězilo. Jinak, nezažije-li dítě ani v rámci své skupiny **nikdy** úspěch, může u něj převážít negativní vztah k matematice, případně i ke školnímu vzdělání vůbec. Připomeňme nejčastější větu hereckých vyznání: „Matematiku jsem nikdy neměl rád, nikdy jsem v ní nebyl úspěšný.“ Či vzpomínku vysokoškolského učitele: „Soutěživé hry jsem nenáviděl, i když jsem matematiku uměl. Řešení úkolu nelze nařídít do úzkého časového intervalu.“

Splnit tento požadavek není jednoduché, zvlášť u her soutěživých. Tam buď vytvoříme několik kategorií úloh či činností, kdy pak žák soutěží jen se stejně zdatnými spolužáky (např. v matematickém rybolovu loví v různých rybnících, skládá snazší nebo obtížnější loto apod.), nebo může zažívat radost jako člen vítězné skupiny. Samozřejmě to klade nároky na vytváření rovnocenné heterogenní skupiny. Vítězí-li stále jen několik stejných žáků, může to působit navíc negativně i na ně, na jejich sebevědomí, povahové rysy (domyšlivost, přehlížení druhých) apod. Při hrách (zejména soutěživých) je třeba velmi bedlivě zvažovat a sledovat, zda třeba být jen u některých skupin žáků nevyvolávají obavy, strach.

Může tomu tak být např. u hry Na Zmrzlíka: Žáci se postaví, učitel zadává úlohy a otázky. Kdo správně odpoví, smí se posadit. Nakonec zůstávají 1–3 „zmrzlíci“. Jedna studentka uvedla: „Nenáviděla jsem hru Na Zmrzlíka a to se pak šířilo i na učitele a na matematiku vůbec. Děsila jsem se hodin, kdy nás zase už bude stát jen několik, já budu mít úplně prázdnou hlavu, na nic si nevzpomenu, nic nevypočtu, celá se budu klepat, ostatní se nám budou pošklebovat...“. Tenhle způsob hodnocení připomíná neblaze proslulé: „Nejslabší, máte padáka“! V pubertálním věku bychom také u dětí mohli dospět k tomu, že nevhodně zvoleným hodnocením hry dáváme návod na šikanu. Proto bychom takovou hru vůbec nedoporučovali, raději budeme u dětí hodnotit a chválit to, co se jim povede.

Soutěživé hry jsou však pro děti všeobecně výrazně přitažlivé, neboť charakteristickým rysem dětství je právě soutěživost – a to ve fyzických výkonech a obratnosti či intelektuálních úspěších. Je však třeba je uvážlivě zařazovat a dbát na duševní hygienu.

2. Jak hrát, úloha učitele

Každá hra má svá specifika a je vhodné zvážit, kdy ji do hodiny zařadit. Obecně je možné hry zařazovat v různých fázích vyučovací hodiny – mohou tvořit motivaci k určitému tématu, přispívat k dokonalejšímu chápání pojmů, k aktivnímu procvičování, k upevnování látky aj. Jejich výsledným cílem však může být i rozvoj prostorové představivosti, logického či kombinačního myšlení apod. Na začátek hodiny proto volíme hry spíše motivační a hry, o kterých víme, že se při nich děti dokáží zklidnit a poté se věnovat další činnosti. Naopak hra na závěr hodiny by měla respektovat určitou únavu (nechceme přímo říci duševní vyčerpanost) dětí.

Velmi důležitá je nutnost dobrého organizačního i materiálního zabezpečení (např. připravit hrací kostky, nůžky, lepidla, čtvrtky, magnety aj.). V práci Krejčová, E. – Volfová, M.: Didaktické matematické hry. sice doporučujeme zařazovat raději hry, které jsou z tohoto hlediska nenáročné,

dnes však je možné vyučování i pro didaktické hry vybavit řadou dokonalých profesionálně vytvořených souprav od specializovaných firem, takže učitel by již nemusel pomůcky vytvářet sám (nebo jen s pomocí žáků) „na koleně“. Zatím asi všude není dostatek finančních prostředků, proto u ukázek her uvádíme i vhodné „domácí pomůcky“. Na českém trhu je několik firem (Albi, Corfix, Blackfire, a další) které se zabývají lokalizací (počeštěním) her a většinou jsou vstřícní výhodným podmínkám při velkém nákupu pro školu. Znovu se dostáváme i k pochopení ze strany vedení školy, že nejde jen o nákup her, ale učebních pomůcek. A ještě jedna rada: Před prvním větším nákupem her se poraďte s někým, kdo už má s nákupem zkušenosti, pro začátek případně i s autory tohoto textu.

Hráči by měli mít možnost zahrát si stejnou hru víckrát. Tak budou schopni snáze rozvíjet vlastní herní strategie. Řešení uvedených a jim podobných úloh zahrnuje kromě strategického uvažování také uvažování matematické. Využití matematických znalostí v mnoha případech zjednoduší hráčům nalezení vhodné, případně dokonce vítězné herní strategie. Po skončení hry můžeme zařadit diskusi zahrnující strategie řešení, které jednotliví žáci (jednotlivá družstva) použili. Každá otázka učitele nebo ostatních hráčů by měla obsahovat nejen otázku Jak?, ale i Proč?, případně Co kdyby? Hlíďte si čas, abyste každou hru na konci hodiny mohli ukončit!

K tomu, aby hraní her přinášelo očekávané výstupy, si musíte nejdříve děti vychovat. Situace ve skutečné třídě může být velmi odlišná od toho, co jste zažili na praxi nebo viděli na ukázkové hodině. Pracujeme najednou poměrně s velkou skupinou dětí, které se musí podřídit společné organizaci a přitom každé se aktivně zapojit. Nejde jenom o výklad pravidel k nové hře, ale o vymezení jednoznačných pravidel hry. Za jakých podmínek se bude hrát (při splnění určitých úkolů apod.), jestli budou hrát všichni, a pokud ne, co budou dělat ti, co nehrají. (Proč nehrají – nechtějí? Nebaví je to?) Nepočítejte s tím, že hned první hra, kterou do třídy přinesete, bude úspěšná a proběhne podle vašich představ. Nenechte se zaskočit tím, že děti budou hlučné, roztěkané, nesoustředěné, zaujaté něčím zcela jiným. Stejně jako vy, i děti si musí na odlišnější styl práce zvyknout, vytvořit si určité návyky. Pokud na hru budou potřeba nějaké přesuny ve třídě, také se vyplatí určitý nácvik. (Když potřebujeme dnes u nás ve třídě srazit dvě lavice k sobě, je uklizení věcí, přesunutí židliček a sražení lavic k sobě hotové rychleji, než já k té lavici dojdu.)

K hladkému průběhu her je role učitele nenahraditelná. Nejde o to, že je to povětšinou on, kdo hru do výuky přináší – to může být klidně i někdo z žáků či studentů na praxi. Učitel je ve třídě vůdčí osobností a z toho vyplývají jeho role ve hře:

Příprava na použití her ve vyučování vyžaduje, aby se vyučující předem s hrou podrobně seznámil, sám si ji několikrát zahrál. Bez toho je velmi obtížné efektivní využití hry s předem stanovenými cíli, ale i sledování diskusí žáků zaměřené na matematické pozadí her apod..

Učitel je garantem správnosti a spravedlivosti hry, měl by bezpečně znát pravidla a být natolik autoritou, aby dokázal mít bez diskuse poslední slovo. Vždycky se objeví někdo (zvláště v pubertálním věku), kdo má pocit nebo je přesvědčen, že umí pravidla lépe, že se nehodnotilo spravedlivě, že se nehrálo poctivě... Záleží na vás, jak dalece znáte „své“ děti a víte, kdy a jak jsou takové výstupy oprávněné a kdy je potřeba je rázně utnout. Částečně tomu předejdete jasně danými pravidly.

Učitel motivuje ke hře, neboť vlastní postoj učitele ke hře, jeho zaujetí a nadšení výrazně ovlivňuje žáky. A to nejen při zapojování do nové hry – není možné dát dětem hru se slovy „hrajte, pravidla znáte“ a jít. Osobní účast učitele ve hře zvýší atraktivitu hry. Obzvláště pak děti v pubertálním věku vidí, že hrou neztrácí člověk nic ze své důstojnosti, a to vynikne ještě více, pokud se učitel nebojí prohrávat.

Bohužel znám velmi málo učitelů, kteří si sednou za stůl k jedné hře s dětmi. Čím to, že tolik z nás nedovede, nedokáže, nechce se přidat k dětem při hře?

Her použitelných v hodinách matematiky je nespočetně. Pokud bychom chtěli být důslední, tak celá matematika je jednou velkou hrou, jedním velkým dobrodružstvím. Ale v následujícím textu se zaměříme na hry, které se většinou dají hrát zcela nezávisle na vyučovací hodině. Jedná se často i o hry komerčně vyráběné, které jsou k dostání v našich obchodech, případně existují na evropském trhu. Některé z nich jsou zařazené mezi hry Deskohraní¹, případně se v nich hrají turnaje celoročně, u některých i mistrovství republiky.

3. Hry s kartami

V této kapitole představíme hry, v nichž hlavní roli hrají karty. Karty v různé podobě, kartičky vyrobené na koleně, pexesa, domina, atd. Je až překvapivé, jak se dají ty kdysi zavrhané „čertovy obrázky“ používat.

Domino

Hra Domino je založena na skládání dvojitých kostek či karet do řad tak, aby se na sousedících částech kostek vyskytovala stejná čísla nebo obrazce. U dětské hry domino je číslo určeno počtem teček, ve školním dominu však číslo můžeme vyjádřit různými způsoby, např. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}; \frac{6}{8}; 0,75$.

Hru lze využít i pro zopakování geometrických termínů a symboliky. Ve svém dominu můžete vytvářet dvojice příklad – výsledek, geometrický obrazec – jeho název apod. Všechna domina tohoto typu si však musíte vyrobit sami. Vyplatí se zvolit větší rozměry a při práci se třídou je připevňovat třeba na magnetickou tabuli. Předem si rozvrhněte, co na svém dominu chcete mít. Většinou není v lidských (učitelských) silách vytvořit všechny kombinace zvolených prvků, a proto vhodně zkombinujte návaznosti.

Pexeso

Kdo dnes ví, že původ slova je ryze český, pocházející z televizní hry Pekelně se soustředí? Od první sady s večerničky jsou dnes v prodeji desítky tematicky rozličných her. Každá obsahuje dvojice stejně označených 20–64 kartiček. Na začátku hry se promíchané kartičky rozloží obrázky dolů. Při hře každý hráč po řadě otočí dvě z nich. Jsou-li stejné, smí si je nechat a může otočit další dvě – jinak je otočí zpět. Pro potřeby výuky si svou sadu musíte vyrobit sami. A dvojice nemusí být totožné, „stejnost“ (souvislost, příslušnost...) může být nahrazena jen stejnou číselnou hodnotou uvedených výrazů, nebo může jít o náčrt obrazce a jeho název apod. Hra není pro paměť snadná, je proto možné zprvu nechávat jednou otočené kartičky již lícem nahoru.

Variantou pexesa je hra **K9**. S českým manuálem je dostupná na našem trhu, ale dá se snadno vyrobit. Ve hře je 36 karet s obrázky psů připravujících se na velkou show. Psi mají čísla od 1 do 9, tedy každý pes je ve hře čtyřikrát. Úkolem hry je seřadit všechny psy, tedy získat karty v pořadí od jedné do devíti. Karty se rozloží na stůl lícem dolů. V každém tahu hráč, který je na řadě, dvě obrátí. Pokud je na otočených kartách pes s číslem hodícím se mu do pořadí, kartu si bere. Jestliže

¹ Deskohraní dříve Olympiáda duševních sportů je devítidenní maraton desítek turnajů, her a soutěží. Hlavním pořadatelem je klub deskových her Paluba v Praze a pořádá se většinou začátkem října. Informace lze získat na www.hrejsi.cz/stat/mso

si vezme obě karty, může obrátit další dvě. Vyhrává ten hráč, který první seřadí všech devět psů. Lze si bez problémů vyrobit vlastní variantu hry K9 s takovými náměty, kde potřebujete upevnit v žácích určitou posloupnost. Je možné použít řadu zlomků se stejnými čitateli, druhé mocniny, ale i geometrické obrazce, kde určujícím kritériem je počet stran mnohoúhelníku apod.

Originál hry je doplněn házením kostkou s čísly 1-3. Podle hozeného čísla se určí, kolik karet může hráč obrátit.

Loto

U hry můžeme zaznamenat podobný princip jako u předchozího pexesa - přiřadit k sobě výrazy se stejnou hodnotou nebo významem. Připravíme kartičky s příklady a k tomu základní tabulku s výsledky, umístěnými do pravouhelníků stejných rozměrů jako kartičky. Děti si berou kartičky, vyřeší příklad a přiloží ke správnému výsledku. Tabulka je postupně kartičkami zakrývána. Ruby kartiček mohou vytvářet souvislé linie čar, případně i nějaký obrázek. Ten by měl odpovídat věku řešitelů – tedy ne Červenou karkulku pro 7. ročník (i když devátáci by ji znova ocenili); obrázek by neměl být příliš návodný, aby se nedal složit bez matematické práce. S lotem mohou pracovat jednotlivci nebo skupiny při procvičování probrané látky.

Hledej stejné

Ve hře Hledej stejné je třeba připravit kartičky, na nichž budou různými způsoby zapsána stejná čísla či vyjádřeny tytéž pojmy (pro každé číslo nebo pojem 3–6 kartiček). Každý žák si vybere jednu kartičku a pak hledá ty spolužáky, jejichž kartička vyjadřuje totéž.

To lze využít i k náhodnému rozdělení žáků do skupin i k zopakování a procvičování učiva. Děti se pohybem po třídě také relaxují a rozvíjejí i sociální vztahy.

Příklady kartiček:

- $\sqrt{169}$; $5^2 - 3 \cdot 2^2$; obsah obdélníka o stranách 6,5 a 2,
- čtyřúhelník, jehož úhlopříčky se půlí, jsou na sebe kolmé a strany nesvírají pravý úhel; čtyřúhelník, jehož každé dvě protější strany jsou rovnoběžné, všechny stejně dlouhé a nejsou kolmé; kosočtverec
- různě vybarvené sítě krychle.

Matematico (též matematický poker)

Matematico je hra, kterou hrají s dětmi snad už čtvrtstoletí a pořád mě překvapuje svou oblíbeností. Je to hra, kterou hraje každý sám za sebe, tedy nároky na přípravu jsou minimální. Výjimkou je první hra, kdy vysvětlujete pravidla.

Ke hře jsou potřeba čtyři sady čísel od 1 do 13 – nejlépe poslouží polovina balíčku pasiánsových karet, kde symbolu **J** přiřadíme 11, symbolu **Q** 12 a **K** 13. Každý hráč si připraví hrací plochu – čtverec s 5x5 políčky, přičemž horní hranice počtu hráčů není omezena. Zadávací zamíchá balíček a postupně svrchu obrací a hlásí čísla. Hráči čísla zapisují do jednotlivých čtverečků hned, jak je číslo ohlášené (nepíší si je „do zásoby“). Po ohlášení posledního (25.) čísla si každý sám spočítá získané body:

za 2 stejná čísla zapsaná v řádku nebo v sloupci 10 bodů

za 3 stejná čísla	40 bodů
za 2 stejná čísla a za 3 jiná stejná čísla	80 bodů
za 4 stejná čísla (kromě jedniček)	160 bodů
za 4 jedničky	200 bodů
za postupku 5 čísel (libovolně zpřeházenou)	50 bodů
za řadu čísel 1, 10, 11, 12, 13	150 bodů

Je vhodné při vysvětlování pravidel zapsat bodovací tabulku na tabuli a nechat děti, ať si ji opišou třeba na desky sešitu. Pokud budete hrát častěji, jednotlivé hodnoty si velice rychle zapamatujete, zrovna tak jako děti.

Obrovská výhoda hry je v neomezeném počtu hráčů a tím pádem se skvěle hodí na konec vyučovací hodiny – jedno kolo je odehrané a vyhodnocené během pár minut. Nechávám děti, aby si partii vyhodnocovaly samy s tím, že tabulka se vyplňuje propisovačkou a čísla jednou zapsaná do tabulky se nepřepisují. Osvědčilo se mi lákat děti na hru, ale její název (Matematico) říci až po odehrání zkušební partie. Děti jsou většinou nadšené a každé je rozhodnuté to pro příště naplánovat lépe.

Hra rozvíjí kombinační schopnosti a prostorovou představivost a aktivuje účastníky. Má v sobě prvky náhody, a tak může vyhrát i slabší žák.

Příklad hry:

Postupně byla obrácena a čtena čísla: 7, 3, 8, 2, 12, 13, 1, 4, 12, 10, 5, 9, 11, 7, 6, 5, 7, 13, 8, 3, 5, 1, 11, 10, 6. Následující tabulky ukazují dva hráče, kteří v téže hře dosáhli různého počtu bodů.

1	12	13	10	11	150
1	8	6	10	11	0
3	2	4	6	5	50
7	12	7	7	5	40
3	8	9	13	5	0
20	20	0	10	80	0

7	8	8	7	7	80
10	12	11	1	13	150
6	5	5	11	5	40
10	12	2	1	4	0
6	3	9	3	13	10
20	10	0	10	10	0

První hráč získal 370 bodů a druhý 290 bodů.

Při větší časové rezervě lze zahrát variantu, kdy po prvním kole mají žáci z 25 daných čísel vytvořit nová umístění, a to tak, aby získaný bodový součet byl a) co největší, b) co nejmenší. Opět mohou soutěžit (nyní již bez náhody).

Porovnej

Pomůckou jsou kartičky, na kterých jsou zapsána buď čísla nebo výrazy s čísly (kladné zlomky, racionální čísla, součiny, součty, mocniny, odmocniny, ...) – vždy podle toho, jaké učivo je třeba procvičit.

Kartičky se promíchají, dají na kupičku, soupeři si berou vždy po jedné kartě a položí je vedle sebe. Kdo má vyšší hodnotu, obě kartičky bere. Je-li hodnota stejná, přidají oba hráči další 2 karty a porovnají hodnoty posledních karet.

Hra končí buď vyčerpáním časového limitu, nebo získá-li jeden ze soupeřů všechny karty. Je lépe, hrají-li proti sobě dvojice, neboť je více zajištěna správnost rozhodnutí o větší hodnotě karty.

Jde o hru s prvky náhody, vyhrát může i slabší hráč, což může zlepšit jeho vztah k matematice.

Vytvoř 24

Vyrobte si kartičky, na nichž jsou zaznamenány čtveřice čísel. Pak je ukazujete žákům a ti se z nich snaží pomocí matematických operací vytvořit číslo 24. (Podle náročnosti výpočtu mohou být kartičky bodově ohodnoceny, např. od 1 do 3 bodů.) Kdo z žáků řekne jako první správný výpočet, získá kartičku (případně body). Zvítězí ten, kdo získá nejvíce kartiček (bodů).

Hra je vhodnější pro práci v dělené třídě nebo ve skupinách.

Příklady čtveřic čísel:

1, 2, 3, 4;	1, 2, 3, 9;	2, 3, 5, 7;
1, 2, 3, 5;	2, 2, 2, 4;	2, 2, 6, 7;
1, 2, 3, 6;	2, 2, 4, 5;	3, 5, 8, 9.
1, 2, 3, 7;		
1, 2, 3, 8;	4, 4, 6, 8;	

(Lze využít i zlomky např. $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{8}$, 7, 9; $\frac{2}{3}$, 1, 6, 7; $\frac{1}{4}$, 6, 8, 8.)

Jako jinou soutěž skupin lze zadat úlohu takové čtveřice čísel najít. Vyhrává skupina, která objeví nejvíce čtveřic (samozřejmě i s ukázáním, jak dojít k číslu 24)

Ligretto



Ligretto je hra postřehová. Mohou ji hrát malé děti od chvíle, kdy zvládnou číselnou řadu do desíti, a svou rychlou akční hrou zaujme i starší děti.

Každý hráč má čtyři balíčky karet s čísly 1 až 10. Sada pro čtyři hráče se dá koupit dokonce ve třech různých barevných kombinacích, takže může hrát až 12 hráčů najednou (ale to už je o zabítí). Pokud děti hra nadchne, ochotně si vyrobí karty samy. Karty pasiansové či žolíkové lze použít jen v případě, že máte dostatek odlišných rubových stran, protože při závěrečném třídění

je nutné rozlišit jednotlivé karty zpět k hráči.

Každý hráč si zamíchá svých 40 karet se stejnou rubovou stranou a odloží stranou neviděných deset karet – to je jeho balíček ligretto. Z ruky před sebe vyloží tři karty a hra může začít. Na povel „Ligretto hra“, pokud má někdo obrácenou jedničku, vloží ji doprostřed stolu a ostatní se snaží na ni přikládat následné hodnoty stejné lícové barvy až do desíti. Pokud nelze z vyložených karet přikládat, odpočte si hráč z ruky tři karty a obrátí před sebe. S horní kartou může hrát. A obrací další trojici. Pokud přiloží kartu z trojice vyložené na začátku, doplňuje kartami z balíčku Ligretta. Vyhrává ten, kdo se první zbaví balíčku Ligretta a vykřikne „Ligretto stop!“ Za každou kartu

zbylou v balíčku Ligretta si hráč odečte dva body. Karty uprostřed stolu se podle rubových barev roztřídí zpět hráčům a ti za každou dostávají bod. A může se hrát další kolo. Vyhrává ten, kdo první překročí sto bodů. Ligretto je velice rychlá hra, která na nikoho nečeká. Děti dokáží hrát jako jeden hráč i ve dvou či třech, kdy vytvoří skvěle spolupracující tým.

Vždycky se někdo dostane do záporných bodů, takže procvičování sčítání a odčítání celých se odehrává za bedlivého dozoru všech zúčastněných.

Desítka

Desítka je nápaditá až akční hra. Používají se k ní nejlépe karty z Ligretta, základní sada jsou 4 řady čísel od jedné do deseti, i když stejně dobře poslouží klasické pasíánsové karty. Vložíte na stůl čtyři karty a pomocí matematických operací z nich skládáte výsledek 10. Číslice lze psát v libovolném pořadí a slučovat ve víceciferná čísla, musí se ale použít všechny čtyři.

Např. 3 3 4 5 lze řešit několika způsoby:

$$53 - 43$$

$$3.3 + 5-4$$

$$3.4 + 3-5$$

$$5.(3+3-4)$$

Při procvičování nebo při turnajové verzi hrají proti sobě dva hráči s jednou sadou, tj. se čtyřmi desítkami karet. Hru lze hrát i s celou třídou. Toho, kdo začne mluvit jako první, nikdo nepřekřikuje a všichni respektují. Tohle je poměrně náročné a děti musí už být zvyklé na určitá pravidla hry. Občas se vyplatí zavést pro ty nejrychlejší hráče jedno nebo dvě kola mlčení po úspěšném výstupu. Hra je velice vhodná, když děti seznamujete s mocninami – obzvláště výhodná je totiž ve hře mocnina jedné a exponent nula. Je překvapující, jak rychle děti pochopí a vstřebají výhodnost těchto operací. U nás v současné době jsou tyto operace zakázané, což na druhou stranu vedlo k tomu, že děti prozkoumaly matematiku hodně do daleka, co by se jiného dalo použít, a používají faktoriály nebo kombinační čísla.

Brzy se objeví otázka, kolik je vlastně kombinací této hry. Je jich 715 a téměř všechny mají alespoň jedno řešení. Používáme sešit se všemi řešeními k rozsouzení sporů, jestli k dané kombinaci je triviální řešení či ne. Existují však tři kombinace, u kterých asi řešení neexistuje, a to (1 6 6 7), (5 7 7 8) a (6 7 7 8).

Hra se dá hrát i tak, že výsledek je jiné číslo (8, 9 nebo 11 či 12) nebo nechat danou čtveřici a hledat k ní různé varianty.



Cink!

Je to další z postřehových her. Základní sada obsahuje balíček karet se symboly ovoce a zvonek na úder, jaký známe z hotelových recepcí ve starých filmech. Hráči si mezi sebe rozdělí všechny karty lícem dolů. Pak je postupně obracejí a pokládají je před sebe na hromádku. Na kartách jsou

symboly různého ovoce (vždy na jedné kartě jeden druh) a počet se pohybuje od jedné do pěti.



Pokud je na některých vyložených kartách součet stejných symbolů roven pěti (na obrázku jahody), hráč, který to postřehne, udeří do zvonku uprostřed. Děti se učí vyhledávat stejné znaky, rozvíjí si postřeh a rychlé uvažování.

Nikdy se mi nepodařilo přijít této hře na chuť. Ale respektuji její vysokou oblibu u dětí, hlavně asi kvůli tomu hluku. Hra může mít na hráče až destruktivní účinky.

Šestá bere!

Tato hra je určena pro 2 až 10 hráčů a v plném počtu je velmi atraktivní. V balíčku je 104 karet očíslovaných od 1 do 104. Po zamíchání každý hráč dostane 10 karet a zbylé čtyři karty se vyloží na stůl do sloupečku pod sebe. Každý hráč si vybere jednu ze svých karet a připraví před sebe lícem dolů. Na povel všichni karty obrátí a vzestupné pořadí čísel určí pořadí hráčů. Začíná hráč s nejnižším číslem a přiloží svou kartu za kartu vyloženou na stole, a to za nejbližší nižší. Pokud všechny koncové karty jsou vyšší, hráč si vybere libovolnou řadu, vezme si ji a na její místo položí svou kartu. Pokud přiložená karta je šestá v řadě, bere si hráč celou řadu a nechává tam tu svou. Sebrané karty hráč odkládá stranou, tyto karty už do hry nevstupují.

Hra vyžaduje spoustu taktizování, i když při plném počtu hráčů je to často sázka naslepo. Karty jsou označeny různými počty kravských hlav a o vítězi rozhoduje nejmenší počet nasbíraných krav. Hráči se učí strategickému uvažování a plánování, hra je nutí nepřetržitě sledovat hru a vést si povědomost o již zahrnutých kartách.

Land unter

Je hra velmi podobná předchozí, ale pro děti atraktivnější. Všechny hrací karty s čísly (1 – 60) se rozdají hráčům a podle symbolů na kartách dostanou hráči záchranné kruhy. Doprostřed hrací plochy se položí dvě karty s prasátko (ta jsou očíslovaná podle výšky vody od 1 do 12 a každá karta je dvakrát). Stejně jako v předchozí hře si hráči připraví jednu kartu a najednou obrátí. Hráč s nejvyšší kartou si vybere jedno z prasátek, hráč s druhou nejvyšší kartou bere zbylé prasátko a klade před sebe. Ten, kdo má před sebou prasátko s nejvyšší hodnotou, se topí a ztrácí jeden záchranný kruh. Hra mnohem více než **6. bere!** vyžaduje taktizování a plánování, proto děti raději hrají ve skupinách, aby se mohly radit.

Po skončení kola si hráči předávají karty a záchranné kruhy, takže postupně všichni hrají se všemi kartami a nemohou si stěžovat na nepřízeň osudu při prvním rozdávání. Hra rozvíjí paměť, a to nejen krátkodobou, ukazuje porovnávání nejen dvou čísel vedle sebe, ale sledování souvislostí na celém stole. Při prvních hrách bývá pro učitele velkým překvapením, jak děti nedokáží porovnat více čísel a odhadnout výhodný tah.

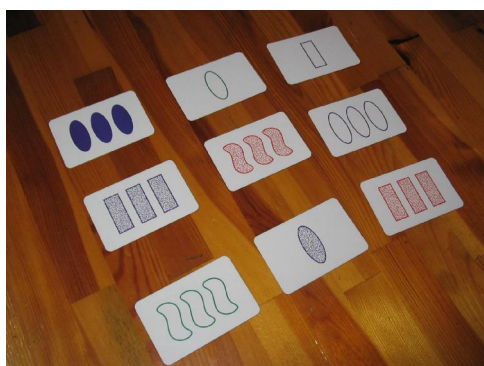
Set

Set je karetní hra o postřehu a kombinaci. Na kartách jsou symboly, u kterých sledujeme čtyři jevy

- tvar (obdélník, ovál, vlnka)
- počet znaků (1, 2 nebo 3)
- barva (zelená, červená, modrá)
- výplň (plná, šrafovaná, prázdná)

Set je pak taková trojice, která nemá žádný jev společný, a pokud ho má, tak je shodný pro všechny tři karty. Na obrázku je set tvořen kartou se třemi modrými plnými ovály v levém horním rohu, kartou se třemi zelenými vlnkami bez výplně v levém dolním rohu a kartou se třemi červenými šrafovanými obdélníky vpravo dole. Tyto tři karty mají společný **počet** (3) znaků a v ostatních znacích se liší.

Na začátku se vyloží 9 karet do čtverce. Pokud mezi nimi není set, vyloží se další tři karty. Kdo



správně určí set, bere si jeho tři karty. Při špatném určení hráč 1 kartu vrací. Z počátku toto pravidlo nepoužíváme, protože všichni by byli v minusu, popř. by se báli pokoušet se o určení setu. Děti se na hře poměrně dlouho učí, co je set, co znamená společný znak pro všechny. Pokud ale pochopí závislosti, jsou bezkonkurenčními hráči.

Česká obdoba Setu (byť se mluví o naprostém originálu) se jmenuje **3**. Karty mají tvar velmi protáhlého rovnoramenného trojúhelníku, použité symboly jsou čtverec, kruh, trojúhelník a barvy žlutá, zelená, červená.

Bohužel šrafování je na takové úrovni, že je velmi špatně odlišitelné od plné barvy. S kartami se manipuluje poměrně nešikovně, původní rozstavení devíti karet do kruhu se doplňuje pokládáním okolo. Budete-li mít možnost výběru, je volba jasná.

Mayské šílenství

Hra přebírá prvky z mayské matematiky, hlavně označení čísel i označení nuly, které jinak starověké civilizace nepoužívaly. To je vše, co má hra s indiánskou kulturou společného.

Hra obsahuje karty s hodnotami -5 až +5 a několik karet bonusových (žolíka, reverz, skip, pyramidu) a dvacet žetonů s čísly 1-10 (každé 2x). Na začátku hry každý hráč (2-4) dostane pět karet a vezme si jeden žeton. To je jeho tajné číslo, ke kterému se snaží dostat. Hráči postupně odhazují karty na hromádku a počítají nahlas její hodnotu. Tedy každou odhozenou kartu přičtou nebo odečtou podle její hodnoty k výsledku hromádky. Jestliže hráč odhodil kartu a tím se dostal ke svému tajnému číslu, obrátí žeton lícem nahoru a bere si další tajné číslo. Vyhrává ten, kdo má jako první pět obrácených žetonů. Po odehrání svého tahu si hráč dobírá z balíčku do pěti karet.

Žolík může mít libovolnou hodnotu v rozmezí -5 až +5 dle potřeby hráče, reverz změní znaménko hromádky nebo odhazované karty, skip vynechává v tahu následujícího hráče a pyramida nuluje hodnotu hromádky.

Ke hře jsou přiložené číselné osy, které mají pomoci malým dětem v přičítání či odčítání čísel. U starších dětí jde hlavně o procvičování početních operací v oboru záporných čísel. Byť pravidla působí velmi jednoduše, i starší děti mají ze začátku velké problémy s tempem (hrají velmi pomalu).

4. Hry s hracími kostkami

V této části jsou představeny hry pro dva a více hráčů, při nichž jsou potřeba hrací kostky. Některé hry byly převzaty z knih Janes, N.S. *Problem Solving with Polyhedra Dice* (New York: Cuisenaire Company of America, Inc, 1994) a Novotná, J. - Kubínová, M. - Sýkora, V. *Matematika s Betkou 3 pro 8. ročník základní školy* (Praha: Scientia, 1998). Jsou konstruovány tak, aby podpořily vytvoření prostředí, které podnítí žáky k přemýšlení, hledání souvislosti, učí je něco nového, hledání vítězných strategií, spolupracovat apod. Současně podporují u žáků používání korektního matematického jazyka.

Ve všech použitých hrách je zařazena manipulace s kostkami. Tento rys her dává všem hráčům možnost být aspoň v některé části hry úspěšnými: Někdo bude dodávat nápady, někdo je bude zaznamenávat, jiný např. zpracovávat, další manipulovat s kostkami atd.

Při hrách převzatých z Janes, N.S. *Problem Solving with Polyhedra Dice* (New York: Cuisenaire Company of America, Inc, 1994) se používají hrací kostky ve tvaru různých pravidelných a polopravidelných mnohostěnů. V současné době jsou již tyto hrací kostky běžně dostupné na českém trhu. Jediným problémem může být, že stěny kostek nemusí být vždy pokryty číslicemi nebo matematickými znaky, které jsou pro danou hru potřeba. Tuto nesnáz můžeme snadno odstranit polepením stěn mnohostěnu potřebnými texty na samolepicích nálepkách. Uvedených případů však není mnoho.

Umístí své hodnoty (Janes, 1994)

2-3 družstva, 2 hráči v každém družstvu

Potřebujete: 1 desetistěnná hrací kostka s čísly 0 až 9, 1 hrací plán pro každé družstvo

Pravidla: Vyhrává družstvo, které má nejmenší celkový součet

1. Hod'te desetistěnkou. Hozené číslo platí pro všechny hráče.
2. Zapište číslo do jednoho z okének na svém hracím plánu.
3. Jakmile jednou zapíšete číslo do okénka, nesmíte s ním hýbat.
4. Střídejte se v házení desetistěnkou tak dlouho, až zaplníte všechna okénka.
5. Vypočítejte a zaznamenejte rozdíl mezi každým z cílových čísel a vaším číslem.
6. Sečtěte všechny rozdíly. To je vaše skóre ve hře.

Hrajte hru aspoň dvakrát.

Hrací plán:

Cíl	Číslo	Rozdíl
Nejblíže k 100	□□	
Nejblíže k 500	□□□	
Nejblíže k 1 000	□□□□	
Nejblíže k 5 000	□□□□	
Nejblíže k 10 000	□□□□□	
Nejblíže k 100 000	□□□□□□	
Celkem		

Příklad

První kolo: 6

Nejblíž k 1 000	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> 6 <input type="checkbox"/>	
Nejblíž k 5 000	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	
	Družstvo 1	

Nejblíž k 1 000	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	
Nejblíž k 5 000	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> 6	
	Družstvo 2	

Na závěr této hry doporučuje autorka hry otázky pro diskusi typu: „Který z čtverečků jsi vyplnil nejdřív? Proč?“

Vyškrtní číslo (Janes, 1994)

2 hráči

Potřebujete: 1 osmistěnnou kostku očíslovanou 1 až 8, 1 šestistěnnou kostku (krychli) očíslovanou 1 až 6, 1 hrací plán pro každého hráče

Pravidla: Vyhrává hráč, který dosáhne nejvyššího skóre.

1. Rozhodněte, kdo začne.

2. Hod'te osmistěnkou a šestistěnkou. Hozená čísla sečtěte.

3 Vyškrtněte tento součet nebo kterákoli jiná čísla na svém hracím plánu, která po sečtení dají součet z bodu 2.

Příklad při jednom hodu padlo: 2, 4. Zahrát můžete jednu z těchto možností:

Možnost 1:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
---	---	---	---	---	--------------	---	---	---

 Možnost 2:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
--------------	---	---	---	--------------	---	---	---	---

Možnost 3:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
---	--------------	---	--------------	---	---	---	---	---

 Možnost 4:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
--------------	--------------	--------------	---	---	---	---	---	---

4. V házení se střídáte, dokud můžete vyškrtnout nějaké číslo. Váš soupeř pokračuje tak dlouho, dokud on může vyškrtnávat.

5. Sečtěte všechna svá vyškrtnutá čísla. To je vaše skóre ve hře.

Hrajte hru aspoň třikrát.

Hrací plán:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----	----	----

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----	----	----

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----	----	----

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----	----	----

Na závěrečnou diskusi jsou nabízeny otázky typu „Urči nejmenší možný výsledek“, „Vytvoř dvě různé posloupnosti hodů, při nichž by bylo možno vyškrtnout všech 14 čísel“ nebo „Najdi nejmenší počet výměn potřebných k vyškrtnutí všech 14 čísel“.

Otáčející se součiny (Janes, 1994)

2 družstva, 2 hráči v každém družstvu

Potřebujete: 2 dvanáctistěnné kostky očíslované 1 až 12, 2 sady žetonů, každá jiné barvy, přibližně 20 pro družstvo, 1 hrací plán

Pravidla: Vyhrává to družstvo, kterému se podaří umístit čtyři žetony v jedné řádce, sloupci nebo úhlopříčce.

1. Domluvte se, kdo začne.

2. V házení se střídáte.

3. Hodíte oběma dvanáctistěnkami, vynásobíte příslušná čísla a umístíte svůj žeton na součin.

4. Vaši soupeři hodí jednou dvanáctistěnkou. Tím získají nové číslo, vynásobí jím libovolné číslo z předchozího hodu a položí svůj žeton na výsledné číslo. Je-li jednou na čísle žeton, nelze tam umístit druhý.

5. Pět hvězdiček na hracím plánu jsou divoké čtverce a nelze je pokrýt. Mohou být použity kterýmkoli družstvem k získání čtyř žetonů v řadě.

Hrajte hru aspoň třikrát.

Příklad

Hozeno: 5, 3
Žeton na 15

1	★	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	14	●	★
16	18	20	21	22	24	25	27
28	30	32	33	35	36	40	42
44	45	48	★	49	50	54	55
56	60	63	64	66	70	72	77
80	81	84	88	90	96	99	★
100	★	108	110	120	121	132	144

Družstvo 1

Hozeno: 9, 3
Žeton na 27

1	★	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	14	●	★
16	18	20	21	22	24	25	●
28	30	32	33	35	36	40	42
44	45	48	★	49	50	54	55
56	60	63	64	66	70	72	77
80	81	84	88	90	96	99	★
100	★	108	110	120	121	132	144

Družstvo 2

Hrací plán:

1	☆	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	14	15	☆
16	18	20	21	22	24	25	27
28	30	32	33	35	36	40	42
44	45	48	☆	49	50	54	55
56	60	63	64	66	70	72	77
80	81	84	88	90	96	99	☆
100	☆	108	110	120	121	132	144



Dvanáctistěn 1



Dvanáctistěn 2

Pro závěrečnou diskusi k této hře je mnoho užitečných informací obsaženo v samotném popisu herní strategie.

Dojdi k nule

Jde o soutěž dvou hráčů nebo týmů. V tazích se hráči střídají a v každém tahu mohou dané číslo buď vynásobit dvěma nebo odečíst od něj druhou či třetí mocninu libovolného čísla. Hráč, který dosáhne nuly, vyhrává. Výchozí číslo lze získat pomocí dvou či tří hodů kostky.

Příklad hry a její tři možné průběhy: výchozí číslo je 62.

Varianta 1:

Hráč A vynásobí číslem 2, získá 144; hráč B odečte 12^2 , získá 0 a vyhrává.

Varianta 2

Hráč A odečte 7^2 , získá $62 - 49 = 13$; hráč B vynásobí číslem 2, získá 26; hráč A odečte 5^2 , získá 1; hráč B odečte 1^2 , získá 0 a vyhrává.

Varianta 3

Hráč A odečte 7^2 , získá 13; B odečte 3^2 , získá 4; A odečte 2^2 , získá 0 a vyhrává.

Hra kromě procvičování numerického počítání s přirozenými čísly učí děti i kombinovat a volit různé strategie.

Hra pro dva hráče (Novotná a kol., 1998)

Potřebujete: 2 hrací kostky, 2 figurky různých barev, 1 hrací plán

Pravidla: Cílem každého hráče je dostat svou figurku co nejrychleji z místa START do místa CÍL. Vyhrává ten, kterému se to podaří jako prvnímu.

Zahájení: Každý hráč hodí oběma kostkami. Začíná ten hráč, jemuž padl větší součet čísel na obou kostkách. V případě rovnosti součtů hází oba hráči znovu.

Průběh hry: Při výměně hráče hází hráč oběma kostkami a zapamatuje si obě čísla, která mu padla. Jestliže je hráč v obdélníkovém políčku, nahradí písmeno m v nejbližším kruhu jedním z obou čísel, která mu padla (hráč sám rozhoduje, které z čísel použije). Jestliže rovnost v kruhu platí, hráč postupuje na další políčko a hází znovu; jestliže neplatí, hraje druhý hráč.

Příklad hracího plánu je uveden na str. 18.

V této hře je možné volit různé modifikace hracího plánu, což nabízí pestré využití v různých oblastech školní matematiky. Lze ji použít jak při odhalování vlastností matematických objektů, tak i jako hru procvičovací. Při diskusi se lze zaměřit např. na objevené vlastnosti a jejich možné využití při hře.

Hra s kostkami

Jde o soutěž skupin. Hráč ze skupiny, která bude začínat, hodí třemi hracími kostkami a sdělí, jaká padla čísla. Pak všechny skupiny pracují na vytvoření všech možných výsledků různých matematických operací (a s využitím závorek) ze tří sdělených čísel. Po 3 minutách učitel práci přerušuje a skupiny střídavě sdělují – vždy po jednom čísle – k jakým výsledkům došly. Když nějaká skupina už nemá připravený žádný další výsledek, střídají se jen ty zbylé. Pak hází hráč z další skupiny (ta pak začíná s oznamováním výsledků).

Vítězí skupina, která ohlásila nejvíce čísel.

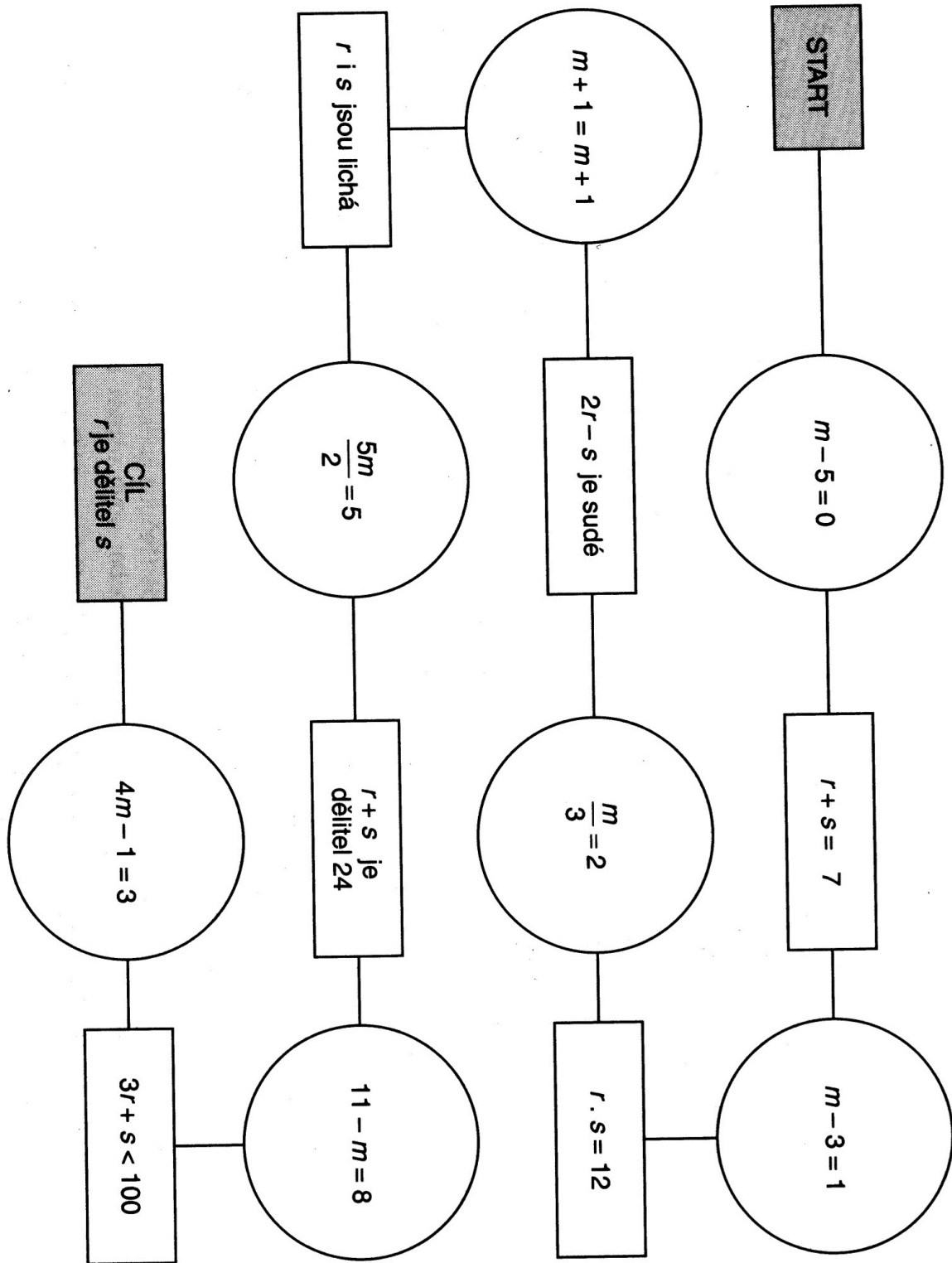
Varianta hry: všechny možné výsledky jsou na kartičkách umístěných na magnetické tabuli. Skupina si zároveň s ohlášením výsledku bere příslušnou kartičku. Vítězí skupina, která získá nejvíce kartiček.

Je třeba připravit kartičky s čísly 0 až 42, 44, 45, 48, 50, 54, 55, 60, 64, 66, 72, 75, 80, 90, 96, 100, 108, 120, 125, 150, 180, 216.

Naši studenti zkoušeli hru učinit přitažlivější např. tím, že na kartičkách byl i název číslovky v angličtině (i s výslovností), nebo obrázek vlajky nějaké země i se jménem země (případně i s názvem hlavního města) apod.

Obměna hry: vytvářet všechna možná čísla např. ze tří nebo čtyř dvojek. Připouštíme-li i mocniny i zápisy víceciferných čísel (222 ; 22^{22} aj.), mohou žáci řešit i zajímavé matematické problémy – např.: Jaké největší možné číslo lze takto získat?

Příklad hracího plánu pro Hru pro dva hráče



Stovka

Je to hra pro neomezený počet hráčů, tedy použitelná pro celou třídu. Na začátku hry si každý napíše číslo 100 a učitel hodí kostkou. Hráči mohou použít libovolnou matematickou operaci a dané číslo tak, aby se přiblížili k jedničce. A znova se hází. Vyhrává hráč, který první dosáhne jedničky.

Kromě čtyř základních operací je možné přidat ve vyšších třídách mocninu a odmocninu, ale pouze s příslušným číslem (tedy druhou odmocninu jen v případě, že padla dvojka).

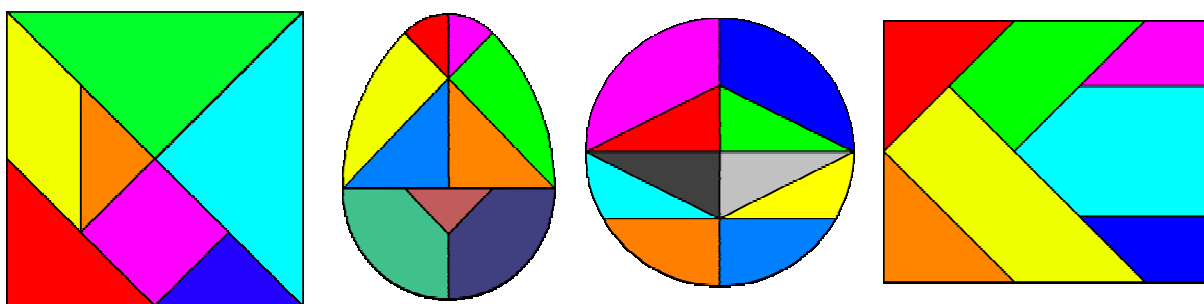
Zajímavá varianta hry je s použitím kalkulačky. Princip hry je naprosto stejný, pouze na začátku děti navolí na displej kalkulačky číslo 100. Je zajímavé sledovat, jak odvážně se s podporou techniky děti pouští do dělení a často končí beznadějně zamotané do řady desetinných míst.

Je potřeba hned při prvním hraní této hry ohlídat správnost matematického zápisu postupu. Děti mají tendenci zapisovat např. $100-1=99:3=33+2=35$... atp. a vytváří si tím naprosto nežádoucí návyky. Stačí nahradit rovnítko šipkou.

5. Skládačky

Pro nabývání zkušeností s geometrií, geometrickými útvary a jejich vlastnostmi a pro rozvíjení představivosti je důležitá hra dítěte s kostkami, mozaikami, stavebnicemi (Lego, Merkur aj.) a to už od útlého věku. I proto se do výuky matematiky zařazují **Skládanky** na 1. i 2. stupni ZŠ. Toto zařazování her se skládankami dobře pomáhá dotvářet geometrický svět dětí. Děti si je často mohou i samy vyrobit, vystříhat z tvrdého papíru jednotlivé díly, některé lze i zakoupit profesionálně vyrobené (např. Evereto se prodávalo pod názvem „Grips“, tangram jako „Dědečkova krabička“ apod.).

Nejznámějšími skládankami jsou tangram (podivuhodná skládanka ze 7 dílů), na 1. stupni i „Kolumbovo vejce“, „Kouzelný kruh“, „Evereto“. Na obrázku jsou zleva doprava v uvedeném pořadí. (Popis je v [1].)



S dílky stavebnic se pracuje různě. Buď se skládají tak, aby se vyplnil daný obrys (nesmějí se přitom nikde překrývat, mohou se však převracet a většinou musí být užity všechny), nebo je jen přibližně předepsán tvar, který se má získat (trojúhelník, pravoúhlý trojúhelník, pes, pták, svíce, člověk v pohybu, ...). Někdy děti vytvářejí obrázek zcela jen podle vlastní fantazie, který pak vhodně nazvou (např. „Smutný havran čekající na jaro“).

V matematice pak můžeme skládanky využít i jinak. Např. u tangramu můžeme vyžadovat na záčích určení obsahu a obvodu jednotlivých dílků, zjištění, jakou část celku (případně i v procentech) tvoří, které části jsou shodné, podobné, které jsou souměrné, požadovat ze dvou nebo tří dílků složit konvexní či nekonvexní mnohoúhelník atp.

Z názorů žáků na skládky:

„Fajnový – přišel jsem na novou věc.“

„Je to zábavný, dobrý nápad. Akorát někdo musí umět Pythagorovou větu.“

Homino

Zajímavá hra, která rozvíjí kombinační a logické myšlení, je druhá varianta hry DOMINO. V časopisu IQ byla tato hra uváděna pod názvem **Homino**. Může ji hrát jedinec či dvojice, dobré je preferovat **nalezení** řešení před rychlostí, proto by nebylo dobré využívat ji jako soutěž. (Spíš jako odměnu za dobrou práci.)

Řešitel dostane číselné schéma, které odpovídá sestavení kostek domina do obdélníku; nejsou v něm však uvedeny hranice dominových kostek. Jejich nalezení je právě úkolem řešitele.

Postup řešení: Vhodné je vypsát si všechny možné kostky a vyznačovat postupně ty, jejichž umístění bude určeno. Nalezneme kostku, která má co nejmenší počet možných umístění, nejlépe jen jediné, a vyznačíme ji. Někdy se tím zmenší počet možností pro jinou kostku nebo je nějaká kostka (např. díky umístění na okraji schématu) již jednoznačně dána.

Máme-li vyznačenu kostku s čísly xy , oddělíme ve schématu další sousedící dvojice xy hranicí, neboť na další společné kostce již být nemohou.

Jde o přitažlivé postupné hledání, vylučování, nalézání.

Preferujeme (zvláště při prvních řešeních a u mladších žáků) schémata, která mají právě jedno řešení.

Příklad schématu, které má jediné řešení

4	0	2	4	2	5	4
3	5	3	4	4	3	1
4	3	2	5	1	3	2
4	1	3	2	0	1	1
5	0	3	2	5	0	1
0	2	5	0	5	0	1

Řešení úloh křížkovkového typu je aktivita, která má velmi široké uplatnění. Jsou pro žáky motivující, odpovídají jejich zálibě v záhadách a hlavolamech. Mohou být využity velmi různorodě, od procvičovacího aktivit po terminologické, od individuální práce po skupinovou. Lze je přizpůsobit věku a úrovni žáků. Mohou být využívány jak pro práci přímo ve vyučovací hodině, tak i při domácí práci žáků. Lze při nich dobře využít mezipředmětové vztahy. Křížovky zaměřené na terminologii lze najít např. v knize *Matematické křížovky* (Novotná a kol., 1996) nebo v učebnicích a pracovních sešitech řady *Matematika s Betkou* vydaných nakladatelstvím Scientia. Použitá témata křížovek bohatě pokryjí učivo 2. stupně základní školy.

Geometrické křížovky

Geometrické křížovky patří mezi hry, které jsou přitažlivé, zajímavé, rozvíjejí prostorovou představivost a kombinační schopnosti.

Na internetu je najdete pod názvem malované křížovky nebo kódované obrázky. Křížovku #158

						1	2	1				
					1	2	1	2	1			
			2	4	4	11	1	2	2	4	4	12
		3										
	1	3										
	1	3										
		3	1									
1	3	1										
	1	3										
	1	1										
	1	1										
	3	1										
	4	1										
	4	1										
	2	3										
		4										
		4										
		2										

Obrázek z <http://kod.petricek.net>

může žák řešit sám, může být zadána jako soutěž dvojic. Je třeba mít čtverečkovaný papír, na kterém je vyznačen základní obrazec (čtverec nebo obdélník) s legendou nad každým sloupcem a vedle každého řádku. Číslo udává, kolik polí má být ve sloupci, nebo v řádce vybarveno. Např. 1 – 2 – 1 říká: v této řadě (někde) bude vybarveno 1 pole, pak aspoň 1 pole zůstane nevybarvené, dále jsou vybarvena 2 pole, opět aspoň jedno zůstane nevybarvené a dále ještě 1 pole bude vybarveno. Samozřejmě není problém najít na internetu a vytisknout již nadepsanou síť.

Zejména při prvním zadávání je třeba dbát na to, aby výsledek byl jednoznačný. (Příklad zadání viz obr.)

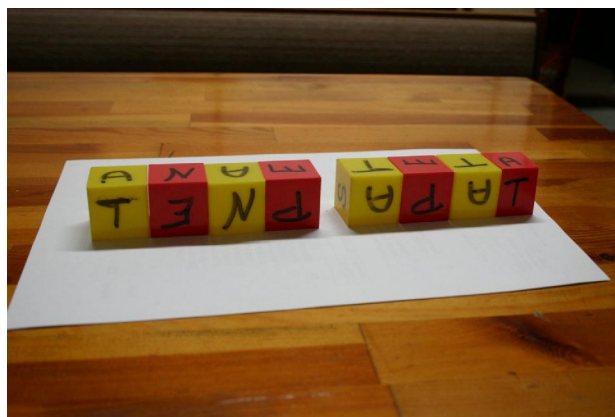
Zajímavou variantu představují křížovky – lodě. Do základního schématu (např. čtverce 8×8 políček) je umístěn např.* jeden „křižník“ (vytvořený ze 7 polí), dva „parníky“ (každý ze 4 polí), tři „ponorky“ (2 sousedící pole) a dva „čluny“ (z 1 pole). Lodě nesmí mít společný žádný bod. Po zakreslení lodí zapíšeme legendu a schéma s legendou

předáme řešiteli.

Snad už klasickou variantou je Námořní bitva, kdy si dva soupeři navzájem ostřelují loďstvo oznamováním souřadnic. Při zadávání souřadnic dbáme na správné psaní a jednoznačně preferujeme zápis čísla před používanou kombinací čísel a písmen.

Čtení ze zadních stran krychlí

Pro pěstování prostorové představivosti je výborná hra **Čtení ze zadních stěn krychlí**.



Vhodnou pomůckou jsou shodné krychle, na jejichž stěny jednotným způsobem vyznačíme písmena (na každou stěnu jedno). Ve složitější variantě můžeme použít dva způsoby popsání krychle. Učitel si na stolku před sebou z písmen na krychlích vytvoří nějaký zápis (obrázek vlevo). Děti však vidí z krychlí jen horní podstavy, zadní a některé boční stěny (obrázek vpravo) a přesto mají zápis vyluštit. Vyspělejší řešitelé mohou dostat jen náčrtek, jaká písmena jsou vidět. Někteří

* množství a tvary lodí lze upravit

řešitelé si zpočátku pomáhají náčrtkem, jiní si dokonce musí vytvořit síť krychle nebo i krychli sestavit. Luštění zápisů je však přitažlivé (pro věk od 13 let). Je možno využít spolupráci ve skupinách i soutěž skupin. Žáci také mohou nápisy sami vytvářet a zadávat náčrt situace – ke čtení ze zadních stěn (a horních podstav a některých bočních stěn) jako problémový úkol soupeřům.

Žáci 7. tříd se ke hře vyjadřovali takto:

„Moc se mi to líbilo, i když ze začátku to bylo těžký.“

„Mně se to líbilo, i když ten začátek byl hrozný, potom už to šlo rychle a snadno.“

„Bylo to dost super, ale nejdřív jsem tomu musela přijít na kloub. Bylo to skvělý.“

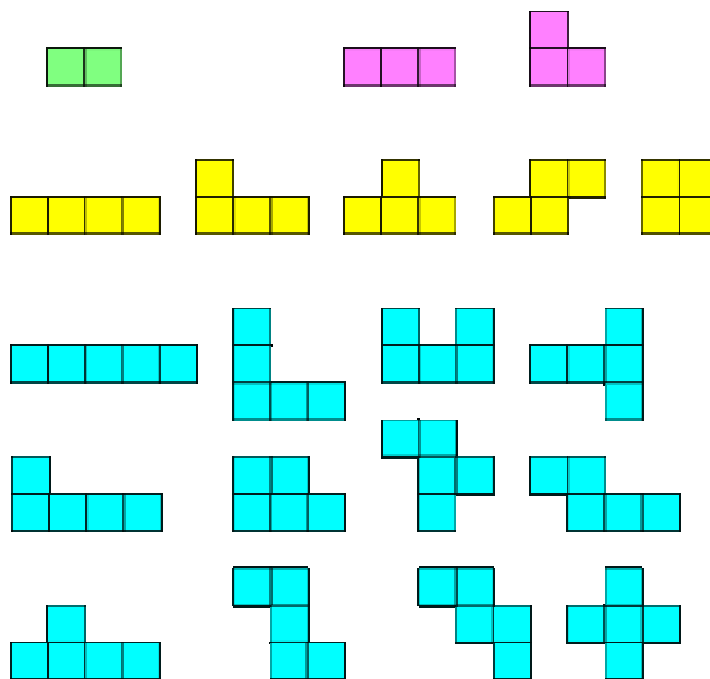
„Docela dobrý.“

„Bylo to neobvyklé, ale pro mou hlavu to není.“

Určitou obtíží této hry je vytváření zápisu z pouhých šesti písmenek tak, aby měl určitou vypovídací hodnotu, nebyl primitivní (typu „Ála volá Jáje“, „Máma má kolo.“). Snad by bylo možné využít spolupráce s učitelem českého jazyka, který by mohl tvorbu zápisů zadat jako zajímavou součást výuky českého jazyka. Osvědčilo se nám jako první popis kostek použít písmena E S T N A P. (Někteří řešitelé spíše než prostorovou představivost zapojují kombinační myšlení a jazykovou pružnost a zápis hádají přeskupováním písmen ze zadních stěn.)

Polyomino

Prostorovou představivost a kombinační myšlení dobře rozvíjejí **Polyomina** (název vymyslel S. W. Golomb; zabýval se jimi od r. 1953)



Jsou to rovinné obrazce, vytvářené ze shodných čtverců tak, že každý má aspoň jednu stranu společnou s jiným čtvercem. Skupiny po dvou čtvercích nazýváme domino (má jeden tvar, na obrázku je to zelený obrazec), po třech trimino (má dva různé tvary, na obrázku to jsou fialové obrazce), po čtyřech tetramino (má pět různých tvarů a jeho obrazce jsou na obrázku žluté), po pěti pentamino (má 12 různých tvarů na obrázku vybarvených modře), po šesti hexamino (35 tvarů), po

strana 22

sedmi heptamino (108 tvarů) atd. Za různé považujeme tvary, které nelze žádným shodným zobrazením přemístit tak, aby se překrývaly. Polyomina dovolují vytvořit řadu zajímavých úloh i her.

1) Naleznete a vytvořte všechny tvary tetramina, pentamina, eventuálně i hexamina. Vhodné je volit stranu jednotkového čtverce asi 1,5 cm; tvary lze narysovat na čtverečkový papír, pak nalepit na tvrdý papír a vystřihnout. Je zřejmě možné zakoupit je i hotové. Pak zjistit: Jaký je obsah a obvod jednotlivých tvarů? Které tvary jsou souměrné?

2) Které tvary hexamina jsou sítí krychle, které tvary pentamina jsou sítí „otevřené krabíčky“?

3) Složte tvary pentamina do nějakého pravoúhelníku. Bude mít obsah $12 \times 5 = 60$ základních čtverců; lze využít obdélník 3×20 (to je nejtěžší a existuje jen jedno řešení), nebo 4×15 , 5×12 , 6×10 nebo 2 obdélníky 5×6 . Oblíbené je umístit tvary pentamina do „normální“ šachovnice 8×8 , kde ovšem budou 4 čtverečky volné; toto skládání má více než 10 000 možných řešení. (Pro „spoluřešitele“ je možno umístění volných čtverečků předepsat, např. že leží ve středu šachovnice, v rozích apod.)

4) Doplňte všechny tvary tetramina jedním vhodným tvarem pentamina (lze využít 8 tvarů – nevhodné jsou tvary připomínající písmena I, X, T, L) a vyplňte jimi čtverec 5×5 .

5) Vyberte libovolný tvar pentamina a výběrem z ostatních tvarů vytvořte tvar podobný, ale s devětkrát větším obsahem (tj. každá strana bude třikrát větší; lze nalézt pro všech dvanáct tvarů pentamina).

6) Kolik tvarů pentamina stačí umístit do šachovnice 8×8 , aby se již žádný další nevešel (minimum je 5 tvarů)?

7) Rozložte na šachovnici 13×13 jedenáct tvarů pentamina tak, aby se dvanáctý tvar již nedal umístit.

1) až 7) lze zadat jako zajímavou problémovou úlohu, jako práci – případně i soutěž pro dvojice nebo skupiny (Kdo vyřeší, složí, najde? Kdo dřív?).

8) Hra na šachovnici:

Varianta A: Dva hráči (případně dvě dvojice) kladou střídavě tvary pentamina do šachovnice. Kdo již nemůže umístit žádný tvar, prohrává.

Varianta B: Stejně, hráči si však předem rozdělí tvary (buď vybírají po řadě nebo mladší či slabší hráč si může předem vybrat 2-3 tvary).

Varianta C: Tvary pentamina jsou nakresleny na kartičkách, které jsou položeny obrázkem dolů. Hráč si otočí kartičku a pak musí tvar pentamina na ní zobrazený umístit do šachovnice. Kdo vylosovaný tvar nemůže umístit, prohrává.

Z několika (případně všech) tvarů pentamina jedna skupina vytváří obrazec, který může připomínat nějaké zvíře, věc, písmeno. Pak jeho obrys (i název) předloží druhé soutěžící skupině, která má obrazec tvary pentamina vyplnit.

Žáci většinou mají zkušenost s počítačovou hrou Tetrix, v níž je třeba optimálně umístit tvary polyamina. Jde o hru, která rozvíjí prostorovou představivost, postřeh i rychlé rozhodování. Je vhodné ji připomenout, případně vyhlásit v ní soutěž jako motivaci pro další zabývání se polyominy. Následné dvě hry se dají koupit již hotové a jejich zpracování ztraktivní dětem hru:

Ubongo!



Jedná se o typickou tetrisovou hru (hru s polyominy) ve velmi atraktivním hávu. Je určena pro 2-4 hráče, přičemž zase při plném počtu hráčů je atraktivnější a napínavější.

Každý hráč dostane 12 tetrisových dílků a jednu hrací kartu. Z jedné strany této karty je jednodušší varianta hry se skládáním obrazce ze tří dílků a z druhé strany obtížnější varianta se čtyřmi dílky. Po hodů kostkou se otočí přesýpací hodiny, hráči si podle symbolu na kostce vyberou dílky a skládají obrazec na kartě. V momentě úspěchu volají Ubongo! Každý,

kdo složí obrazec v časovém limitu, si bere dva diamanty. Hra končí vystřídáním všech hracích karet a vyhrává ten, kdo má nejvíce drahokamů jedné barvy.

Děti hrají raději ve skupinách, kdy přes veškeré pesimistické odhady, že si budou překážet, spolupracují a pomáhají si. A co je až překvapivé, snaží se složit obrazec i po vypršení časového limitu, kdy už je splnění úkolu diamanty nehodnoceno a do řešení se spontánně zapojují všichni ostatní hráči.

Blokus

Také hra Blokus využívá polyomina. Je určena pro 2-4 hráče, ale děti obvykle dávají přednost hraní v týmech. Úkolem hry je umístit všechny své kameny na hrací desku a zároveň bránit soupeři, aby umístil své kameny. Každý hráč má kameny své barvy a umísťuje je tak, že se mohou dotýkat kamenů stejné barvy pouze vrcholy, ostatních barev se mohou dotýkat libovolně, samozřejmě kameny se nesmí překrývat.

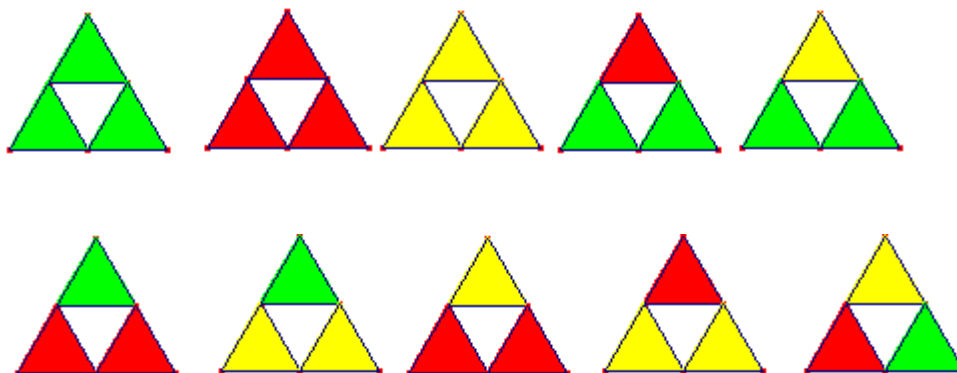


Indiánská mozaika

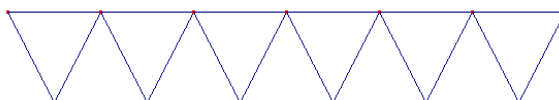
Zajímavé, ale složitější tvary (úlohy a hry) je možné vytvářet z rovnostranných trojúhelníků – vznikají tzv. Polyamondy – známé pod názvem **Indiánská mozaika**.

Ke hře potřebujeme 10 shodných rovnostranných trojúhelníků vybarvených podle vzoru.

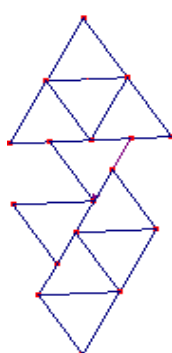
Výroba není příliš náročná a při probírání látky o trojúhelnících lze při jejich výrobě zopakovat nejen střední příčky.



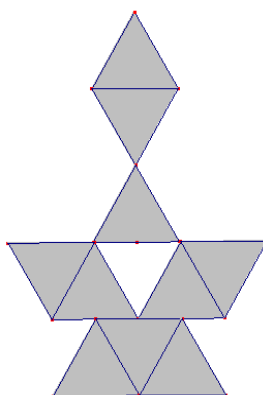
A pak už lze začít skládat obrazce s jediným pravidlem: každý trojúhelník se musí dotýkat sousedních jen stejně zbarveným cípkem. Nejjednodušší obrazec je čelenka a vločka. Ostatní obrazce jsou jen na ukázkou, děti si jich i spoustu vymyslí.



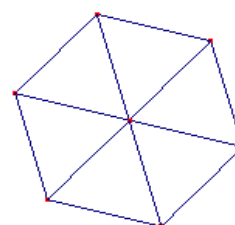
čelenka



Čiňan

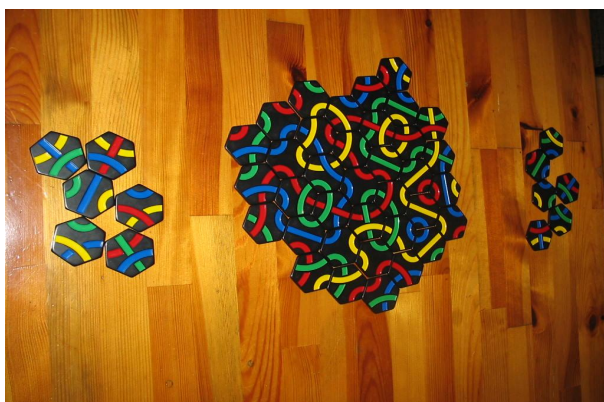


teepee



vločka

Tantrix



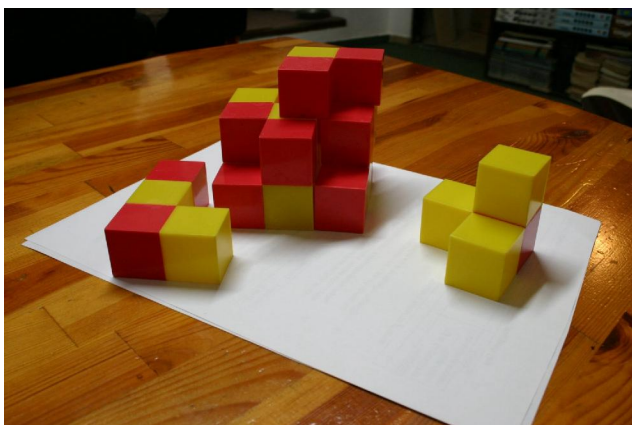
Tantrixové kameny jsou šestiúhelníky s cestami čtyř barev. Plastové kameny jsou velmi příjemné do ruky. Hráči skládají kameny k sobě a snaží se vytvořit co nejdelší cestu své barvy. Kameny se k sobě přikládají tak, aby se dotýkaly celou hranou a barevně na sebe navazovaly.

Dětem dělá obrovské problémy určit, který ze svých kamenů mají (mohou) použít, obtížně se orientují v pořadí barev. Často před uvažováním dávají přednost mechanickému

pootáčení náhodně zvoleného kamene, jestli tam náhodou nezapadne. Hrou rozvíjíme u dětí především orientaci v rovině, využíváme k demonstraci shodných a neshodných zobrazení.

Existuje jakási papírová varianta Tantrixu – jmenuje se Cesty a firma Abacus vydala deset druhů cest (Hvězdné, Zlaté, Zámecké, Hradní, Lesní, atd.). Jedná se vždy o asi 20 šestiúhelníků na kartonové A4, ze kterých se po vystříhání skládají cesty, střepy (co nejvíc nenavazujících úseků), kroužky, pavouci (otevřené cesty z jednoho bodu), květiny (uzavřené cesty z jednoho bodu), obrázky. Pěkné stavby lze posílat do časopisu Luští celá rodina. Mají to jako chráněný průmyslový vzor, takže asi by se jim nelíbilo rozkopírování pro celou třídu, ale cena jednoho archu je dosažitelná pro většinu dětí.

Somu



Z prostorových skládanek připomeňme **Somu**. Obsahuje soubor šesti nepravidelných těles, složených vždy ze čtyř jednotkových krychlí a „schodovité těleso ze 3 krychlí“.

Všechny části lze složit do krychle (jejich objem je celkem roven $6 \cdot 4 + 3 = 27$ jednotlivých krychlí, tedy krychle má hrany délky 3 jednotky). Dále se dají vytvořit různé prostorové útvary, které lze uvést pod názvy „zámek, schodiště, křeslo, pyramida“ aj. (Blíže viz [1].) Uplatní se dobře práce ve dvojicích, případně i větších skupinách. Učitelka MH

o hře vypráví: „**Soma** je právě jedna z těch her, které dokáží člověka úplně pojmout. Děti při skládání Somy křičí, láteří a zase se obrovsky radují...“

Většina škola má v matematických sbírkách Soubor krychlí (krabice s 300 krychličkami dvou barev o hraně 3 cm). Z nich lze velmi jednoduše poslepováním vyrobit řadu skládanek tohoto typu.

Molitánky



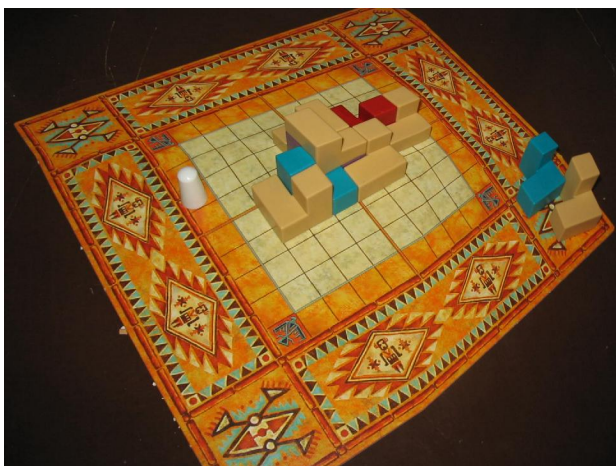
Molitánky je neoficiální označení pro sadu skládaček pod názvem **Little Genius** nebo **Happy Cubes**. Prodávají se jednotlivě i v sadách podle náročnosti. Kompletní sestava má 24 částí a rozdíl v nárocích na složení první a poslední je opravdu značný.

Každý hlavolam se skládá z šesti částí vyrobených z látky měkké na omak, ale pevné v tvaru. Dílky jsou poskládány do obdélníkového rámečku. Z dílků lze složit krychle a ta pak zase po rozebrání srovnat do rámečku.

Optimální velikost a dobrá skladnost dělají z molitánků velmi vděčnou hru. Pokud necháte děti skládat všechny, rychle se projeví jejich

trpělivost, systematicčnost, zručnost. Celkově manipulace s touto skládačkou výrazně zlepšuje jemnou motoriku a rozvíjí prostorovou představivost.

Pueblo



Pueblo je jedna z mála her, kde do děje vstupuje i třetí rozměr. Hráči mají několik kostek – každé dvě vznikly rozříznutím krychle. Jedna část je barevná a druhá bezbarvá – neutrální (děti je označují jako neutrální a utrální). Hráči staví z kostek stavbu uprostřed hracího plánu, po jehož obvodu prochází konzervativní náčelník. Jestliže někde zahlédne nějakou barvu, své lidi trestá.

Hráč si vybere, se kterou částí krychle bude stavět (v následném tahu musí použít tu druhou část), přistaví část puebla a posune náčelníka o 1-3 políčka. Náčelník pohledne ve směru políčka, jestli neuvidí barevný dílek, čím výše, tím hůře. Proto se hráči snaží barevné části zakrývat neutrálními. Pokud se náčelník dostane do rohového políčka, prohlédne si stavbu puebla shora.

Děti hrají tuhle hru s chutí, byť je spíše poklidná, vůbec není akční. Je působivé sledovat, jak stavbu různě obcházejí a kontrolují všechny možné pohledy na rozestavěné pueblo. Proto je vhodné tuto hru hrát u volného stolu.

6. Hry bez zvláštního zařazení

Většina učitelů si často tvoří hry vlastní. Pro mnohé univerzální hry se lze inspirovat u známých televizních soutěží, jako je např. hra **Riskuj**. Ta je vhodná ve výuce matematiky pro opakování určitého tematického celku (např. zlomků). Učitel vytvoří úlohy různé obtížnosti (za 1; 5; 10 bodů) a na různá témata (na sčítání zlomků, násobení, složené zlomky, atd.); vždy je vhodné vytvořené úlohy doplnit i o logické nebo zábavné úlohy. Pak začnou soutěžit skupiny, které si po řadě vybírají úlohy zvolené obtížnosti, řeší je, získávají body atd.

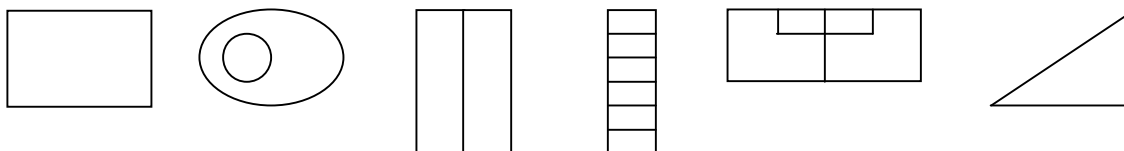
Naši studenti na praxi vymysleli hru, kdy skupiny žáků mají uhodnout určitou tajenku. Skupiny řeší několik úloh a za každou správnou odpověď dostávají indicii – slovo, které tajenku napovídá. Po získání několika indicií probíhá ve skupinách dost bouřlivá diskuse, všichni se snaží tajenku objevit.

Někteří naši studenti se inspirovali i počítačovými hrami, např. na začátku hodiny dostal každý žák „dva životy“ a měl si je udržet... Tvořivost učitelů je stále živá.

Neobvyklý pohled

Je vhodné ji zařadit např. jako vstupní aktivitu při stereometrii.

Nakreslete některé běžné objekty z neobvyklého pohledu. Úkolem žáků je objekty určit. Objekty mohou být např.:



Jednoduché tvary můžeme přímo kreslit na tabuli, případně je mít na kartičkách či promítat.

Bingo

Lze hrát individuálně nebo ve skupinách.

Na tabuli napište 10 až 15 matematických položek (např. čísla, jednoduché rovnice, geometrické útvary). Žák/skupina si vybere pět z nich a zapíše si je. V libovolném pořadí popisujte jednotlivé položky jejich vlastnostmi (např. čísla zadat početními výrazy – pro mladší žáky tak lze opakovat i násobilkové spoje – lze je určit též jako kořeny rovnic, geometrický útvar popsat některými jeho vlastnostmi, např. má shodné všechny strany, je osově souměrný). Jestliže žáci mají ve svém seznamu příslušnou položku, označí ji. Komu se podaří vyznačit všech pět vybraných položek, ohlásí „Bingo“. Vyhrává žák/skupina, který první ohlásí „Bingo“. Jde o hru, která má prvky náhody, takže má šanci vyhrát i slabší žák.

Kolečka a křížky

Hra pro dvě skupiny. Jedna skupina má kolečka, druhá křížky. Vyhrává ta, která první získá plnou řadu svých symbolů (tj. řadu koleček nebo křížků).

Připravte čtverec čísel (např. na našem obrázku devět) a nakreslete na tabuli tabulku:

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Každé číslo představuje jeden úkol/otázku. Úkoly/otázky volte podle procvičovaného tématu nebo zařazujte témata různá. Skupiny se střídají ve vybírání čísel úkolů/otázek. Odpovědí-li správně, nahradte číslo úkolu/otázky kolečkem nebo křížkem. V našem příkladu musí vítěz získat tři kolečka nebo křížky v řádku, sloupci nebo diagonále.

Opravujeme chyby

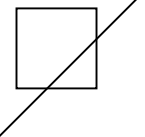
Tato aktivita rozvíjí schopnost žáků odhalovat a opravovat vlastní chyby. Na tabuli napište několik úloh s řešeními, která obsahují chyby. Předem můžete žákům říci, kolik chyb v řešení je. Žáky požádejte, aby pomohli chyby opravit.

Příklady úloh:

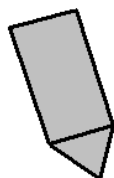
Rozdělte čtverec



přímkou na dva útvary, které nejsou trojúhelníky:



Vyznačte neviditelné hrany hranolu:



$$-\frac{42}{25} - \frac{5}{25} : \frac{1}{12} - \frac{6}{12} = -\frac{47}{25} : \frac{-5}{12} = -\frac{564}{300}$$

Na hada

Všichni hráči si stoupnou a učitel začne zadávat řetězec příkladů („7 krát 8 plus 9 krát 2 děleno 13 plus 17 děleno 9 minus 3...“). Každý si v hlavě počítá, a pokud se ztratí, neví jak dál, či nestačí v rychlosti, sedne si. Až zůstane stát 3 – 5 dětí, učitel zkontroluje, k jakému výsledku došly, a ohodnotí. A může se hrát znova.

Hra je ideální na začátek hodiny, na rozcvičení a rozpočítání, zlepšuje paměťové počítání.

Už po krátké době se děti v paměťovém počítání zlepšují a tempo hry se výrazně zrychlí. Klade to vysoké nároky na učitele, a pokud neumíte opravdu svižně počítat z hlavy, tak se raději do téhle hry nepouštějte. V žádném případě u ní nelze používat kalkulačku.

Zatre



Hra je jakési číselné scrabble. V sáčku jsou kameny podobné polovině dominové kostky v hodnotách 1-6. Hráč si tahá dvě, které následně přikládá na hrací plochu, aby vznikaly součty 10, 11 nebo 12. Menší součty nejsou bodované, větší součty nelze vytvářet. Hra i zápis bodování je velmi jednoduchý na vysvětlení, hru zvládají děti v momentu, kdy umí sčítat přes desítku. Uhlídat si rozestavení na desce a vyhodnotit nejvhodnější umístění kostek trvá už déle. Zatre se hraje ve všech německy mluvících zemích a přilehlých státech a

zvláště v juniorech je naše republika velmi úspěšná. Bohužel rozšíření hry brání naprostý nedostatek herních souprav, kterým v současné době chybí výrobce. Na loňském mistrovství Evropy byla k vidění obrovská zatrovnice v podobě magnetické tabule (obrázek) – prostě ideální do třídy ke společné práci. Ale nepodařilo se mi k ní zjistit nic bližšího.

Hra rozvíjí strategické uvažování, prostorovou orientaci, ale asi její největší přínos vidím v tom,

že je to matematická "počítací" hra a hraje se nezávisle na vyučování, nezávisle na škole, má své turnaje a svá mistrovství.

Dračí devítka (Drakonine)



Tuto hru vždy začínáme pohádkou:

Bylo nebylo jedno království. Šťastné a spokojené, protože bylo střeženo devíti draky. A každý uchazeč o trůn musel prokázat, že dračí devítce rozumí a že se o ně umí postarat.

Ke hře je potřeba deska (9x9 políček) a 50 kamenů s hodnotami 0 – 9. Na začátku hry si každý hráč vylosuje tři čísla, a kdo má vyšší ciferný součet, začíná. Pokud může na hrací plochu kamkoliv mimo políčka s draky položit číslo dělitelné devíti, začíná. V opačném případě dobírá kámen a hraje protihráč. Jestliže je na hrací ploše už umístěné první číslo,

ostatní čísla se přikládají tak, že

- přiložené číslo musí mít alespoň jeden kámen společný s již položenými
- čísla čtená zleva a shora nesmí začínat nulou
- všechna vzniklá čísla jsou dělitelná devíti (ve všech směrech)

Za každou devítku ciferného součtu si hráč vezme jeden drahokam z dračího pokladu. A bere si ze sáčku kameny do tří. Hra končí, jestliže jsou dobrané všechny kameny. Za každý neumístěný kámen hráč vrací jeden drahokam zpět do pokladu. Vyhrává ten, kdo získal větší část dračího pokladu.

Draconine vznikla vyloženě na potřebu procvičování dělitelnosti. Při hře se překvapivě ukazuje, jak děti nemají zažitý pojem dělitelnosti a ciferného součtu, jak i u přikládání jednoho čísla přepočítávají celou řadu.

V méně náročných variantě se dá hrát na dělitelnost třemi.

Da Vinci Code



Tato hra je svým provedením tak jednoduchá, že na hraní stačí jen přeložené kousky kartonu, popřípadě polepené krabičky od zápalek. Ve hře je 12 bílých a 12 černých kamenů s čísly od 0 do 11. Hráči (nejlépe 2) si vyberou kameny libovolné barvy a srovnají si je před sebe tak, aby na ně protihráč neviděl. Kameny jsou z rubové strany označeny znaménkem nerovnosti, které napoví směr seřazení od nejmenšího k největšímu. Pokud má hráč kameny se stejným číslem, jako menší číslo zařadí černý kámen. Hráč na tahu si vybere z kamenů na stole jeden kámen, postaví ho mimo svou řadu (na

obrázku černá jedenáctka) a hádá hodnotu některého kamene soupeře (ukáže prstem, kterého kamene se tip týká). Pokud neuhodne, položí vzatý kámen číslem nahoru a zařadí do své řady na správné místo (na obrázku černá čtyřka).

Pokud uhodne, má dvě možnosti:

1. hádá ještě jednou
2. zařadí vzatý kámen neodkrytý do své řady (soupeř tím pádem musí hádat více čísel)

Vyhrává ten, kdo dřív uhodne všechna soupeřova čísla.

Hra vyžaduje soustředění a procvičuje paměť. Překvapivě se ukazuje, že dětem dělají problémy znaménka nerovnosti a na začátku je tedy potřeba několikrát zkontrolovat správnost seřazení. Děti rády hrají v týmech, kde velmi zaujatě probírají strategii a intenzivně prožívají každý úspěšný tah.

Quarto!



Ve hře je 16 hracích kamenů, z nichž je polovina tmavá a druhá polovina světlá, polovina vysoká a polovina nízká, polovina čtvercového průřezu a polovina má průřez kruhový, polovina je plná a polovina má ze shora vyvrtaný otvor.

Velice dobře lze tyto kameny použít při práci s množinami a logickými operacemi. Např. lze dobře znázorňovat průnik, sjednocení, procvičovat logické spojky (vyber kameny, které jsou tmavé a vysoké, vyber kameny, které jsou hranaté nebo nízké apod.)

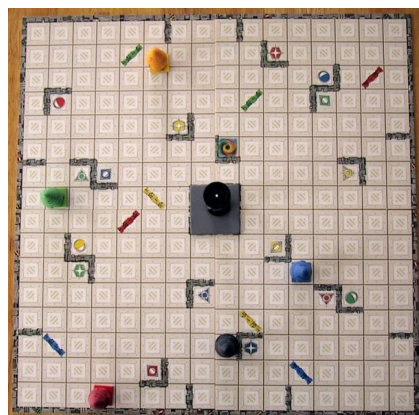
Samotná hra je pro menší děti příliš náročná, ale třídění do množin dle dané vlastnosti se jim líbí.

Samotná hra Quarto se hraje ve dvou. Jeden hráč vybere kámen, podá ho protihráči a ten ho umístí na hrací plochu. Pokud v řádce, sloupci nebo hlavní úhlopříčce vznikne čtveřice kamenů se společným znakem, hráč oznámí svou výhru pokřikem Quarto!

V náročnější variantě lze brát v úvahu i čtveřice kamenů v libovolném těsném čtverci 2x2.

Roborally a Ricochet Robot

Roborally a **Ricochet Robot** patří k hrám zajímavým plánováním, tedy možná by se daly spíše zařadit k základům programování.



Roborally (na obrázku vlevo) je vyložene programovací hra. Každý hráč si připraví pět karet se symboly pohybu robotů (otáčení, pohyb o určitý počet kroků) a postupně je obrací. A protože hrají

všichni, stane se, že další naplánované kroky zavedou robota do záhuby, protože se mu zcela nečekaně dostal do cesty jiný robot. Na obrázku vlevo se žlutý robot krokem vpřed zřítí do propasti. Pro děti je tento styl hry neznámý a po odehrání prvních partií se velmi začaly zajímat o programování a s překvapením se seznamovaly s programovacím jazykem Karel.

Jestliže někdy uvidíte skupinu hráčů, kteří mlčky zírají na hrací plán, a až po nějaké době se ozve třeba „já sedm“, je dost pravděpodobné, že hrají **Ricochet Robot** (na obrázku vpravo). Na hracím plánu jsou rozestavěni čtyři barevní roboti a jeden černý. Všichni roboti se po uvedení do pohybu pohybují přímočaře, pokud nenarazí na zeď nebo jiného robota. Pokud dojdou k zrcadlu (šikmá barevná úhlopříčka), tak zrcadlem své barvy projdou, jako by tam nebylo, a ostatní zrcadla změni jejich směr klasickým odrazem. Na začátku tahu se vylosuje jeden symbol. Na hrací ploše se tento symbol najde a úkolem je dojít k němu robotem stejné barvy co nejmenším počtem kroků.

Jakmile někdo objeví cestu, ohlásí počet kroků a otočí přesýpací hodiny. Než se přesypou, mají ostatní čas jeho výkon překonat. Po uplynutí časového limitu se předvede nejkratší cesta a hráč, kterému se tak podařilo, získává daný symbol do své sbírky. A vylosuje se další symbol.

Hra je svým způsobem velmi poklidná, ale vyžaduje velké soustředění. U dětí rozvíjí uvažování a plánování, učí je minimalizaci postupu, hledání optimální strategie. V neposlední řadě je vede k uvědomění si, že vzájemnou spoluprací dosáhnou lepších výsledků.

Zebra

Jako odměnu za dobrou práci v hodině se osvědčilo dát nějakou úlohu či hru z oblasti logiky. Máme potvrzeno, že se děti na takové úkoly těší a zlepšuje to jejich vztah k matematice. Pro 8. a 9. ročník jsou vhodné úlohy typu **Zebra**, přičemž tato ukázka patří k velmi jednoduchým: Po prázdninách se sešli v nové škole na sídlišti tři chlapi, kteří se znali ze sportovního klubu: jedničkář Skokan, průměrný žák Kopal a propadlík Plavec.

"To je divný," povídá atlet, okresní přeborník ve skoku dalekém, "máme sportovní jména, každý z nás pěstuje některý z těchto sportů, a přitom žádný nedělá ten sport, na který ukazuje jeho jméno."

"To je fakt," přisvědčil mu Plavec.

Jaký sport pěstoval propadlík? A jaký jedničkář?

A následná úloha k velmi obtížným. Řešili jsme ji s dětmi na barevných papírech lepených na zeď.

Pan Smrčka chodí rád na houby. Během poslední dovolené houbařil v osmi lesech, které jsou nejbližší jeho chaty, každý je však jinak daleko. V každém lese byl jednou, v každém sbíral jeden druh hub, v každém se mu něco líbilo a něco zase ne. Pokaždé byl na houbách s někým jiným, pokaždé potkal jednoho známého a pokaždé uviděl nějaké lesní zvíře. Dále víme, že:

- na krásné mýtině uprostřed lesa vzdáleného dva kilometry potkal pošťáka
- klouzky sbíral se synovcem a viděl při tom veverka
- s manželkou byl v lese Hřiva
- rozkopané houby se mu nelíbily v lese, kde spolu s bratrem viděli divokého králíka
- Sekerou tekli překrásný potůček
- nad spoustou neodklizeného listí se rozčiloval spolu se sousedem
- v Beránku byl s tchánem a potkali tam učitele
- lišku viděl ve Stolci
- v Tumovkách sbíral václavky a chodil tam po pěkně upravených cestách
- obdivoval vysoký dub na kraji lesa, kde sbíral kozáky
- u krásné hájovny byl spolu s otcem
- u nevzhledné bažiny za vysokou rozhlednou potkal hajného

- se synem potkali přítele z mládí
 - na kilometr vzdálených Kladínách sbíral ryzce
 - s kolegou se setkal v lese, kde divoké prase vyrušil nadměrný hluk
 - hříbky sbíral v lese pouhých 200 metrů za chatou
 - toulavého psa uviděl u zázračně čisté studánky nedaleko smetiště
 - při sbírání holubinek vyplašil srnce
 - rybník se mu líbil ve Stráni, kde také potkal známého herce
 - s bratrancem v lese vzdáleném 3 km viděli kunu
 - bedly sbíral spolu s dcerou nedaleko ošklivě rozježděné cesty
 - v půl kilometru vzdáleném lese zbyly od posledního polomu vyvrácené stromy
 - autobusáka potkal v lese vzdáleném 2,5 km – rozzlobila ho tam auta na lesní cestě
 - na Pastvinách sbíral lišky
 - v lese 700m za chatou uviděl zajíce
- Jak se jmenuje les vzdálený 1,5 km a co tam pan Smrčka sbíral?

Hádej číslo

Dobře je dětmi také přijímána hra **Hádej číslo**, kterou zná každý pod jiným názvem (Logik hra, Master Mind). Jde o hru běžně známou, kdy jeden hráč si zvolí čtyřciferné číslo, jehož číslice se nesmí opakovat a druhý hráč hádá. O hádaném čísle se jen dovídá, kolik číslic uhádl správně, ale na chybné pozici, a kolik číslic i správně umístil. Které číslice to jsou, samozřejmě neví.

např.

zvolené číslo je 7219

hráč hádá 3295 a má jednu číslici dobře (2) a jednu mimo (9)

Hru většinou hrajeme tak, že ve dvojici jsou oba hráči zároveň zadávajícími i hádajícími. Pravidla zadávání a hádání lze přizpůsobit potřebě.

7. Matematické hry a jak je vyhrávat

Předchozí kapitoly se věnovaly především otázce, jak vhodně didakticky používat hry při výuce matematiky. Tato kapitola otázku obrací. Jejím hlavním cílem je ukázat, jak využívat matematiku při hraní her. V následujícím textu jsou čtenáři předloženy ukázky her, u nichž lze pomocí výpočtů zjistit, jak může jeden z hráčů ve hře zvítězit. Pomocí her tak můžeme přispět k rozšíření vnímání složitosti reálného světa a jeho porozumění, k rozvíjení zkušenosti s matematickým modelováním (matematizací reálných situací), k vyhodnocování matematického modelu a hranic jeho použití a v některých případech i k poznání, že realita je složitější než její matematický model (dle RVP ZV). Hlavní důraz je kladen na hry, při nichž oba hráči mají k dispozici stejné tahy, z nichž nejznámějším představitelem jsou hry NIMové, u kterých budou jednotlivé výherní strategie čtenáři představeny.

Kombinatorická teorie her aneb trocha teorie na úvod

Co je matematická hra

Ve shodě s literaturou zabývající se kombinatorickou teorií her rozumíme **matematickou hrou**

hru, která splňuje následující požadavky:

- Hru hrají dva hráči, kteří se ve hře pravidelně střídají.
- Všechny možné tahy jsou dopředu známe, nejsou ovlivněné náhodou (např. hodem kostky) a ve hře nejsou žádné skryté informace.
- Hráč, který již nemůže učinit tah, prohrává.
- Každá hra musí skončit po konečném počtu tahů.

Vítězná strategie

Prvním důležitým pojmem v teorii her je pojem **vítězná strategie**. Vítězná (nebo také vyhrávající, či výherní) strategie je postup, který hráči zajišťuje výhru bez ohledu na to, jaké tahy zvolí protivník. Najít vítěznou strategii je jedním z prvních cílů, které si při studiu her můžeme klást. Cíl hledání, totiž nalézt způsob, jak hru zaručeně vyhrát, je pro žáky motivující, na druhou stranu hra, u níž známe vyhrávající strategii, ztrácí své kouzlo.

U matematických her vždy existuje vítězná strategie pro jednoho z hráčů. Díky tomu jsou matematické hry a hledání jejich vítězných strategií vhodným doplňkem učiva a slouží především k rozvoji kombinatorického a logického myšlení, ke kritickému usuzování a srozumitelné a věcné argumentaci prostřednictvím řešení matematických problémů. Při hledání vítězné strategie si žáci osvojují kompetence sledovat závislosti, vyhodnocovat je a popisovat je matematickým jazykem.

Otázky pro čtenáře:

Rozhodněte, která z následujících her je hra matematická, a proč:

Kočka a myš

Člověče, nezlob se

Ovečky a vlk

Šachy

GO

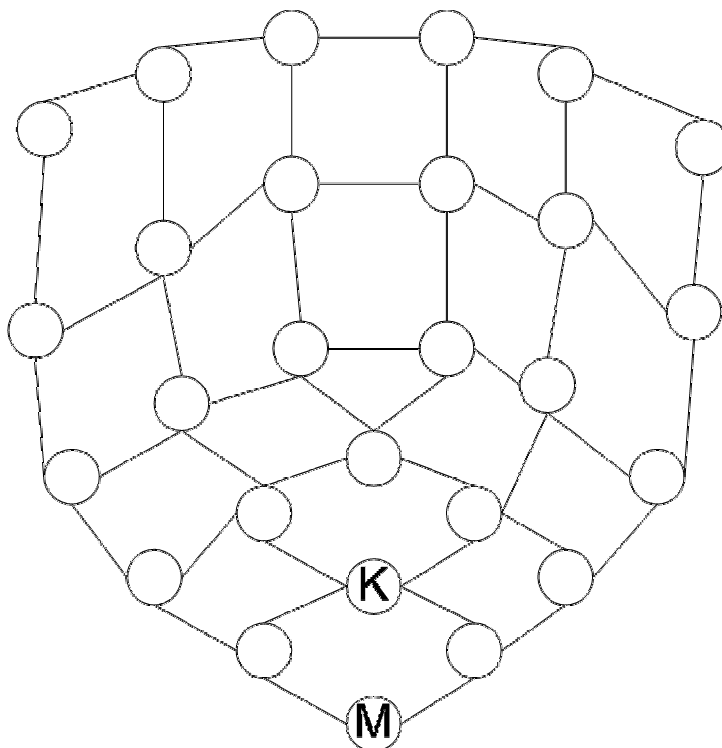
Odpověď na tyto i další otázky uváděné v této kapitole naleznete v samostatném oddílu.

Kočka a myš

První zde představovaná matematická hra se jmenuje Kočka a myš a hraje se na uvedeném hracím plánu.

Kočka je na začátku na poli označeném K a myš začíná na poli označeném M. Kočka začíná. V každém tahu se zvíře posouvá do sousední nory (na sousední pole). Hra končí v okamžiku, kdy kočka chytí myš.

Na první pohled je zřejmé, že hra není vyrovnaná, myš vyhrát nemůže. Co když ale dokáže pořád unikat?



Všechny příklady uváděné v této kapitole jsou na úrovni, kterou jsou schopni žáci na druhém stupni základní školy pochopit. Cílem není přednášet teorii, ale ukázat na příkladech, jak lze teorii budovat, jak vypadá „opravdová“ matematická práce. Po zadání příkladu nastává chvíle, kdy je možné se jím zabývat a hru si zahrát.

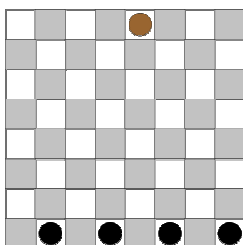
Vhodné otázky po odehrání několika kol

Honí se kočka za myši marně, nebo ji v několika málo tazích dohoní? Existuje nějaký postup, jak myš chytit? Jak rychle musí kočka myš dopadnout?

Úkol pro čtenáře:

Nalezněte vyhrávající strategii pro tuto hru.

Ovečky a vlk



Tato hra hraná na šachovnici je známa i pod jinými názvy (např. Liška a psi, Lišák a houseři). Jeden hráč hraje za ovečky (hraje se čtyřmi kameny, které se pohybují pouze dopředu, a to na nejbližší pole stejné barvy). Druhý hráč hraje za vlka, může se pohybovat dopředu i dozadu. Cílem oveček je znemožnit vlkovi pohyb. Na první pohled je zřejmé, že tato hra je o něco složitější než hra předchozí, a navíc i spravedlivější, protože v ní mohou zvítězit obě strany.

Pro hru je zřejmá i strategie (ve smyslu plán hry), ovečky se snaží postupovat v řadě, kdežto vlk se jí snaží svými nájezdy roztrhnout. Úkolem pro vás a vaše žáky je zjistit, kdo v této hře má vyhrát. Opět je možné zabývat se jen vybranými pozicemi a řešit otázku, jak může (a zda vůbec efektivně může) vlk postupu oveček bránit.

Úkol pro čtenáře:

Nalezněte vyhrávající strategii pro hru Ovečky a vlk.

Odpovědi na otázky pro čtenáře

Matematické hry

Kočka a myš – hra není matematická, neboť nemusí skončit po konečném počtu tahů.

Člověče, nezlob se – hra není matematická, ovlivňuje ji náhoda – hod kostkou.

Ovečky a vlk – matematická hra.

Šachy – hra není matematická, neboť může skončit i remízou. Všechny ostatní podmínky šachy splňují, proto pro ně existuje strategie a to buď vítězná, nebo remízová. Její nalezení však přesahuje současné možnosti výpočetní techniky.

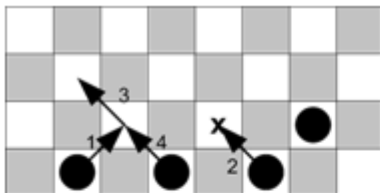
GO – hra GO je příkladem matematické hry.

Kočka a myš

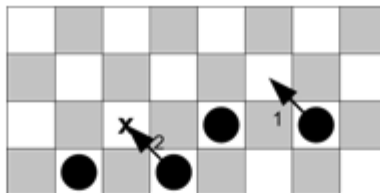
K nalezení odpovědí na tyto otázky je potřeba zabývat se tím, které pozice jsou pro kočku vyhrané a jakou roli hraje ve hře středový trojúhelník. Potom již velice snadno nalezneme vyhrávající strategii, která zjednodušeně řečeno spočívá v tom, že kočka oběhne střed a pak se vydá za myši a chytí ji.

Ovečky a vlk

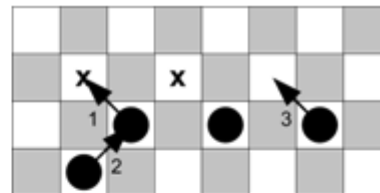
Jedna z vítězných strategií je následující:



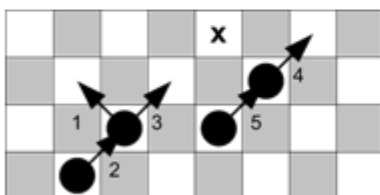
Pokud je vlk na jedné z pozic X, hrajeme tah 3, jinak hrajeme tahy 12.



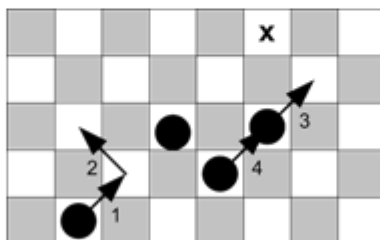
Pokud je vlk na pozici X, hrajeme tah 1, jinak hrajeme tah 2.



Pokud je vlk na pozici X, hrajeme tahy 1234, jinak hrajeme tah 2.



Pokud je vlk na pozici X, hrajeme tah 3, jinak hrajeme tahy 12345.



Pokud je vlk na pozici X, hrajeme tahy 3412, jinak hrajeme tahy 1234.

NIM

Hra NIM je nejznámějším představitelem matematických her. Pod názvem NIM se dnes skrývá celá skupina her. Začneme však s tou základní, od níž se všechny další odvozuji:

Hru hrají dva hráči, před nimiž leží tři hromádky sirek. Každý hráč si ve svém tahu vybere hromádku a z ní si pak vezme libovolný nenulový počet sirek. Hráč, na kterého již žádná sirka nezbyla, prohrává.

Tato hra je zajímavý objekt studia (je zkoumána již od roku 1902), v závěru kapitoly se seznámíte s její vítěznou strategií. Je pravděpodobné, že právě u této hry se žákům nepodaří správnou strategii nalézt, což ovšem neznamená, že se o to nemají pokoušet. Mohou se procvičit v umění, v němž vynikal známý český génius Jára Cimrman – v odhalování slepých uliček. I když to vypadá směšně, umění formulovat hypotézu a vyvrátit nesprávné tvrzení je důležitá dovednost, kterou si mohou žáci z hodin odnést. Určitě také není na škodu tuto úlohu (včetně ukázání vítězné strategie) začlenit do výuky v rámci seznamování žáků s počítáním v jiných číselných soustavách.

Ve většině dalších úloh vede k určení vítězné strategie postupné experimentování a odhalování závislostí, včetně periodicity. Situace se od určitého okamžiku opakují.

Velmi užitečné je také používat „induktivní“ definici vyhrané a prohrané pozice. Prohraná pozice je ta, z níž žádným tahem nemohu dosáhnout pozice prohrané pro hráče, který je na tahu, a naopak vyhraná pozice je ta, z níž takové pozice docílit mohu.

Pro nalezení vyhrávajících strategií u následujících her potřebují žáci pouze základní informace o číselných soustavách (hra NIM), dělitelnosti, zbytcích a zbytkových třídách. Téma dělitelnosti lze při výuce pomocí variant NIMových her vhodně uvést a procvičovat.

NIM česká varianta

Nyní přistoupíme ke hře, která je v české literatuře často pod názvem NIM uváděna. Na hromádce leží předem určený počet sirek. Hráči se střídají v odebrání, každý hráč může odebrat jednu, dvě nebo tři sirky. Hráč, který už nemůže žádnou zápalku odebrat, prohrává.

U této hry žáci obvykle rychle naleznou vyhrávající strategii. Můžeme proto přejít k nejrůznějším modifikacím.

NIM varianta 1

Hráči přidávají na hromádku vždy jednu, dvě nebo tři sirky, kdo dosáhne počtu 21, vyhrál.

NIM varianta 2

Odebíráme 1 až n sirek. Jedná se o rozšíření „české“ varianty hry NIM pro další čísla.

NIM varianta 3

Odebíráme pouze předem dané počty zápalek (např. 1, 2 a 4).

NIM varianta 4

Můžeme buď zápalky odebírat, nebo místo odebrání vracet (podle stejných pravidel jako u odebrání) zápalky, které jsme odebrali v předchozích tazích.

V předchozích hrách se často v popisu prohraných pozic a vítězných strategií vyskytovala periodičita. U hry NIM varianta 2 je například prohraná každá pozice, kdy je počet sirek dělitelný číslem $n+1$. Následující hra umožňuje seznámit žáky s pojmem rozkladové třídy, a to jak při samotném průběhu – zjednodušením sčítání, tak při diskuzi o výherní strategii.

Neděť

Náhodně vybereme 12 čísel (např. vylosováním z karet hry Ligretto). Hráči přidávají čísla na hromádku, hráč, který přidá číslo, po jehož doplnění je součet celé hromádky dělitelný třemi (ve variantách čtyřmi, pěti,...), prohrává.

Posouvání mincí

Další NIMová hra se hraje na pruhu papíru, který je rozdělen na n -polí (např. 12). Na papír položíme tři hrací kameny stejné barvy (do různých polí). Hráči se ve hře střídají, tah spočívá v přesunutí jednoho kamene v předem daném směru k cíli (např. doleva).

Kdo již nemůže přesunout žádný kámen, prohrál. Hru lze hrát ve variantě, že kameny buď mohou, nebo nesmí ležet ve stejném poli.

Tato hra je modifikací předchozí hry. Lze pro ni uplatnit stejnou výherní strategii jako u předchozí hry (v obou variantách). Při této hře můžeme se žáky diskutovat o tom, co znamená, když řekneme, že dvě věci jsou stejné nebo různé, včetně velmi důležité otázky, co vlastně znamená, když řekneme, že dvě hry jsou stejné. Zkuste také nechat žáky najít příklady dalších „stejných“ her.

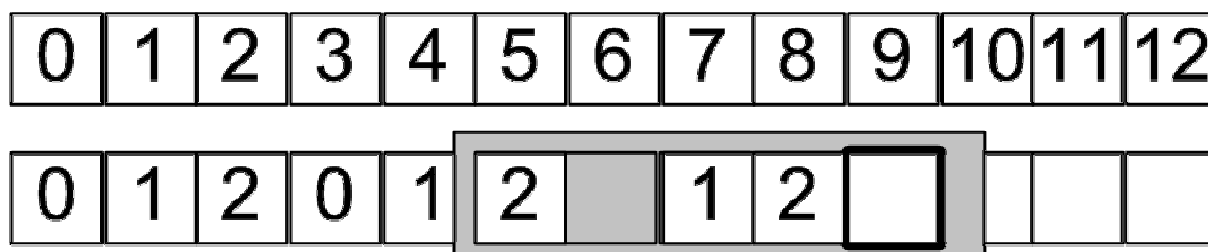
V některých případech můžeme novou hru dostat tak, že dáme dohromady několik jednodušších her. Pro hodnocení takto vzniklé hry je obvykle nutné ohodnotit jednotlivé hry. Na základě tohoto hodnocení ohodnotit celou hru, a tak určit, jestli je daná pozice vyhraná, či prohraná. Obvykle se u her, ve kterých oba hráči mají k dispozici stejné tahy (např. všechny hry typu NIM), pozice v jednotlivých hrách ohodnotí pomocí hromádky v základní hře NIM, která poskytuje stejnou výhodu. Jinými slovy řekneme, že tato pozice ve vybrané hře je ekvivalentní hromádce o n sirkách ve hře NIM. Následně použijeme vyhrávající strategii pro hru NIM.

NIM varianta 5

Hrajeme se třemi hromádkami sirek, hráč si vybere hromádku, z níž může odebrat jednu, dvě nebo tři zápalky.

Pro hodnocení pozic ve hrách typu NIM můžeme použít následující postup. Pozice, která je prohraná, má hodnotu 0 (odpovídá hromádce bez sirek). Každá pozice má hodnotu, která odpovídá nejmenšímu přirozenému číslu, které nelze najít mezi hodnotami pozic, do kterých se lze jedním tahem dostat.

Doporučujeme si tento postup vyzkoušet, nejlépe na NIMových hrách ve variantě 3. V praxi se osvědčil posuvník s okénky na místech, které odpovídaly povoleným tahům. Posuvník postupně posouváme po řadě již ohodnocených pozic, a díky němu snadno vidíme hodnocení všech dostupných pozic. To nám umožňuje ohodnotit pozici, ale také ukazuje vhodný argument pro důkaz správnosti vyhrávající strategie.



Do orámovaného políčka na obrázku doplníme číslo nula, neboť je to nejmenší číslo, které se v políčkách na posuvníku nevyskytuje.

Vítězné strategie her NIM

Hra NIM

Vítězná strategie je následující: Zapišeme počty sirek na jednotlivých hromádkách ve dvojkové soustavě. Pokud je u všech řádů součet cifer na pozici příslušného řádu sudý, je pozice prohraná. Vítězná strategie spočívá v dosažení (a opětovném obnovování) této sudosti, a to až do okamžiku, kdy je počet na všech hromádkách nulový.

Děti mohou odhalit vítězíci strategii i bez znalosti jiných číselných soustav. Vhodné je použít heuristického „postupu odzadu“, kdy se kladou otázky, z které pozice (z jakého čísla) lze jedním tahem dosáhnout cíl a jak na tuto pozici dojít. (viz Volfová, 2000)

Nim česká varianta

V této hře je důležitá dělitelnost čtyřmi. Všechny pozice, ve kterých je na hromádce počet sirek dělitelný čtyřmi, jsou prohrané pro hráče, který je na tahu. Vítězná strategie spočívá v doplňování odběru na násobek čtyř.

Nim varianta 1

Hra je duální variantou předchozí hry a je vyhraná pro prvního hráče, který do hry vloží jednu sirku a pak doplňuje počet sirek tak, aby v každém kole spolu se svým protivníkem vložil čtyři sirky.

Nim varianta 2

Vítězná strategie je stejná jako u české varianty hry NIM, důležitá je dělitelnost číslem $n+1$.

Nim varianta 3

Pro nalezení vítězné strategie u tohoto druhu her je vhodné použít induktivní definici prohrané a vyhrané pozice. Řešení vždy závisí na zvolených parametrech hry. V našem případě (1,2,4) můžeme jednoduše zjistit, zda je hromádka s n -sirkami vyhraná, nebo prohraná pro hráče, který je na tahu: – Prohraná (P), 1– Vyhraná (V), 2 – V, 3 – P (nemohu přejít do prohrané), 4 – V, 5 – V, 6 – P

Tímto způsobem můžeme pokračovat, dokud neobjevíme periodicitu a hledanou závislost. Důležitou součástí je i argumentace, proč to tak funguje. V případě naší hry můžeme argumentovat buď tím, že jsme schopni doplnit protivníkovu čísla na násobek tří, nebo že z induktivní definice hodnocení pozice závisí na hodnocení pouze několika málo předchozích pozic.

Nim varianta 4

Přidávání sirek sice porušuje definici matematické hry (hra může teoreticky trvat nekonečně dlouho), nenarušuje však vítěznou strategii, neboť protivníkovi po nějaké době sirky pro přidávání dojdou.

Neděť

Výsledek této hry mohou hráči ovlivnit pouze hrubou chybou, její výsledek je určen výchozími čísly. Pro zjištění, který hráč vyhraje, je potřeba ověřit, kolik čísel je dělitelných třemi, kolik jich dává po dělení třemi zbytek jedna a kolik zbytek dva.

Nim varianta 5

Každou hromádku z české varianty hry NIM můžeme charakterizovat pomocí zbytku při dělení počtu sirek čtyřmi, prohrané situace pak jsou (0,0,0), (0,n,n) a i pozice (1,2,3).

Strategická teorie her

Kombinatorická teorie matematických her je vhodná pro rozvoj matematických dovedností. V této kapitole se seznámíme se strategickou teorií her, tedy oblastí, která nachází velké využití i mimo matematiku, neboť na mnoho situací z reálného života lze nahlížet jako na hru.

Uplatnění strategické teorie her nalzáme v nejrůznějších oborech – v ekonomii, biologii, sociologii či politologii. Za všechny příklady uveďme, že poslední Nobelova cena za ekonomii (za rok 2005) byla udělena právě za využití teorie her.

V dalším textu uvádíme tři příklady her, které lze studovat pomocí teorie her. Matematické řešení u některých z nich překračuje rozsah učiva základní a střední školy, při použití ve třídě tedy není cílem úlohu vyřešit, ale rozvinout vnímání složitosti reálného světa a jeho porozumění, ukázat možnosti matematiky a vést žáky k poznání, že realita je složitější než její matematický model, že daný model může být vhodný pro různorodé situace a jedna situace může být vyjádřena různými modely.

Důstojník Blotto

Tuto hru hrají dva hráči, kteří chtějí svými jednotkami obsadit dvě vojenské pevnosti. Lze ji hrát s papírem a tužkou, popřípadě se sirkami. Blotto velí čtyřem jednotkám a jeho protivník třem. Každé kolo spočívá v rozdělení a rozmístění všech jednotek do pevností. Hráči umísťují jednotky současně. Hráč, který umístí do pevnosti více jednotek, dostane o jednotku více, než jich tam umístil poražený nepřítel. (Např. kapitán Blotto umístí dvě jednotky do každé z pevností a jeho protivník pošle všechny jednotky do první pevnosti. V takovém případě protivník vítězí v první pevnosti a získává zde dvě Blottovy jednotky a jednu jednotku navíc a Blotto vítězí ve druhé pevnosti a získává zde jednu jednotku. Celkem získal protivník o dvě jednotky více než Blotto.)

Všechny možné varianty můžeme popsat pomocí následující tabulky:

	0,3	1,2	2,1	3,0
4,0	0	1	2	4
3,1	-1	0	3	1
2,2	-2	2	2	-2
1,3	1	3	0	-1
0,4	4	2	1	0

Z tabulky vidíme, že pro hru neexistuje vítězná strategie. Pokud se však chce Blotto vyhnout porážce, stačí, když bude vždy posílat všechny své jednotky společně do jedné pevnosti. Všechny ostatní varianty znamenají pro Blotta nebezpečí porážky. Pokud se Blotto rozhodne použít tuto strategii, musí ji před protivníkem utajit. Nejjednodušším způsobem bude určovat místo určení jednotek náhodně, např. hodem mincí. Tato strategie pro Blotta zaručuje, že nemůže prohrát a s velkou pravděpodobností bude vyhrávat. Nejlepší protivníkovou odpovědí je náhodně posílat vojáky v rozložení (1,2) a (2,1), pak bude Blotto v průměru získávat jeden a půl jednotky za kolo. Rozložení (3,0) a (3,0) by bylo mnohem riskantnější a znamenalo by pro Blotta průměrný zisk dvě jednotky za kolo.

Optimální strategie u strategických her spočívá v tom, že určíme pravděpodobnosti, se kterými budeme volit mezi jednotlivými strategiemi (dostupnými tahy). Tato volba je pak realizována náhodně (např. hodem kostkou) v daném poměru pravděpodobností.

Rozdíl mezi vyhrávající strategií a optimální strategií spočívá v tom, že vyhrávající strategie zaručuje výhru, kdežto optimální strategie je strategie, jejíž užití dává největší naději na úspěch. Hráč, který používá optimální nebo vítěznou strategii, ji nemusí před svým protivníkem tajit.

Nyní se budeme zabývat otázkou, zda zvolená bezpečná strategie je pro Blotta optimální. Obrana protivníka (2,1) a (1,2) svádí Blotta k útoku (2,2), který je sice riskantní, ale zaručuje větší zisk než průměrných 1,5 jednotky. Optimální strategie tak spočívá ve zvolení vhodné míry rizika. Pro výpočet optimální strategie je nutné umět pracovat s maticemi. Postup nalezení optimální strategie zde nebudeme uvádět, čtenář jej najde v doporučené literatuře. Omezíme se pouze na konstatování, že optimální strategie spočívá ve volbě uváděných tahů v poměru 4:4:1. Průměrný zisk, kterého tak Blotto dosáhne bez ohledu na strategii, kterou zvolí protivník, je čtrnáct devítin. Volbou optimální strategie tak Blotto navyšuje svůj zisk oproti bezpečné strategii o jednu osmnáctinu jednotky za kolo. Blotto může tuto optimální strategii zveřejnit, protože jeho průměrný zisk je nezávislý na strategii zvolené protivníkem. Pokud bychom hledali optimální strategii za jeho protivníka, tak je jí volba strategií (3,0), (0,3), (1,2) a (2,1) v poměru 1:1:8:8. Tato strategie zaručuje, že protivník bude v průměru ztrácet nejhůře čtrnáct devítin jednotky za tah, a to bez ohledu na strategii, kterou Blotto zvolí.

Jako úkol je možné nechat žáky zvolit strategie za oba hráče a spočítat průměrný zisk či ztrátu Blotta. Tyto výpočty jsou výborným doplněním výuky pravděpodobnosti.

Větší menší

Tuto hru hrají dva hráči, první si vybere jedno číslo od jedné do tří a druhý hráč se je pokouší uhodnout. Možné odpovědi jsou větší, menší a uhodl jsi. Naším cílem je zamyslet se nad tím, jak má první hráč volit čísla, aby druhému hráči situaci co nejvíce zkomplikoval. Můžeme nechat děti tuto hru několikrát zahrát a pak s nimi o tomto tématu diskutovat. Je zřejmé, že při rovnoměrném rozdělení hádaných čísel je pro druhého hráče velmi výhodné hádat jako první číslo 2, ve třetině případů uhodne na první pokus a ve zbytku na druhý pokus. Pokud se první hráč rozhodne na tuto skutečnost reagovat tak, že dvojku nebude volit vůbec, může druhý hráč upravit svoji strategii tak, že v polovině případů uhodne na první pokus a ve zbytku pokusů na druhý pokus. Tato strategie by byla pro prvního hráče ještě horší. Optimální strategie pro prvního hráče spočívá v tom, že sice volí všechna čísla, ale číslo dva méně často, než zbylá dvě. Optimální poměr pro volbu čísel je poměr 2:1:2.

Žáci mohou zvolit jiný poměr a výpočtem zjistit, o kolik je méně výhodný.

Souboj

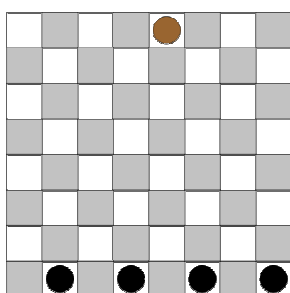
Poslední strategickou hrou, se kterou se seznámíme, je střelecký souboj. Souboj si budeme generovat na jednoduchém modelu, jenž předpokládá, že čím déle budeme mířit, tím větší máme šanci zasáhnout, ale tím větší je riziko, že budeme zasaženi protivníkem. Tuto úlohu lze řešit ve spojitém případě, my si ovšem uvedeme jednoduchý diskrétní model, který lze realizovat se žáky:

Dobu souboje rozdělíme na deset částí. První krok je taseň zbraní. Při výstřelu v n -té části hráč zasáhne protivníka, pokud při hodu dvěma kostkami dosáhne součtu menšího nebo rovno n . Hráči



se před začátkem souboje rozhodnou, ve kterém okamžiku vystřelí. Hráč, který je zasažen před svým výstřelem, již nestřelí. Jsou dvě možné modifikace pravidel, buď hráč, který se rozhodl vystřelit později, může počkat až na poslední kolo souboje (pokud nebyl zasažen), nebo musí dodržet původní plán a vystřelit v naplánovaném kole.

Zkuste se žáky diskutovat o výhodnosti jednotlivých strategií a o jejich závislosti na zvolené variantě pravidel. Úspěšnost jednotlivých strategií můžete ověřit soubojovým turnajem a simulací pomocí generátoru náhodných čísel na počítači (např. v programu MS Excel) – přípravu počítačového zpracování můžete zadat jako seminární práci. Tato hra je opět vhodným rozšířením témat pravděpodobnost a kombinatorika.



Závěr

Všechny uvedené hry zdaleka nepostihují bohatství her, které jsou v současné době k vidění na našem trhu, a ten je jen slabým odvarem trhu s hrami třeba v sousedním Německu. Měli bychom zkoušet nové hry a měli bychom vychutnávat radost dětí z objevování a zkoumání!

Literatura

- FOLTINOVÁ, K., NOVOTNÁ, J.: *Matematické hry a soutěže na druhém stupni základní školy*. Praha, Pedagogické centrum 1997
- JANES, N.S.: *Problem Solving with Polyhedra Dice*. New York: Cuisenaire Company of America, Inc. 1994
- McCALLUM, G.P.: *101 Word Games*. Oxford, Oxford University Press 1980
- MILLEROVÁ, S.: *Psychologie hry*. Praha, Panorama 1978
- NOVOTNÁ, J. a kol.: *Matematické křížovky pro celou rodinu*. Praha, Prométheus 1996
- NOVOTNÁ, J., KUBÍNOVÁ, M., SÝKORA, V.: *Matematika s Betkou 3 pro 8. ročník základní školy*. Praha, Scientia 1998
- Ur. P., WRIGHT, A.: *Five-Minute Activities*. Cambridge, Cambridge University Press 1992
- ZAPLETAL, M.: *Encyklopedie her*. Praha, Olympia 1973
- ZAPLETAL, M.: *Kniha hlavolamů*. Praha, Albatros 1983
- KREJČOVÁ, E., VOLFOVÁ, M.: *Didaktické matematické hry*. 3. vyd. Hradec Králové, Gaudeamus 2001
- VOLFOVÁ, M.: *Metody řešení matematických úloh*. Hradec Králové, Gaudeamus 2000
- HNÁTOVÁ, M.: *Hry k rozvíjení prostorové představivosti*. Diplomová práce. Hradec Králové, UHK 1996
- GARDNER, M.: *Mathematical puzzles and diversions*. London, Bell a Sons. 1960
- BERLEKAMP, E. R., CONWAY, J. H., GUY, R. K.: *Winning ways for your mathematical plays, vol. 1*. Natick, A. K Peters 2001. ISBN 1-56881-130-6.
- BERLEKAMP, E. R., CONWAY, J. H., GUY, R. K. : *Winning ways for your mathematical plays, vol. 3*. Natick: A. K Peters. 2003. ISBN 1-56881-143-8.
- BURJAN, V., BURJÁNOVÁ, L.: *Matematické hry*. Bratislava, Pythagoras 1991 ISBN 80-85409-00-3
- DRESHER, M.: *The mathematics of games of strategy*. Theory and Applications. New York, Dover Publ. 1981 ISBN 0-486-64216-X

Témata seminárních prací

1. Vyberte si skupinu dětí, které nejsou zvyklé hrát hry při vyučování, a popište, jak se vyvíjí jejich vztah ke hraní.
2. Popište své zkušenosti s hraním her ve výuce, a to
 - a. Her bez zvláštního zařazení
 - b. Her s kartami, kartičkami
 - c. Her s kostkami
 - d. Skládačkami
3. Popište pexeso nebo domino, které používáte při výuce matematiky.
4. Naučte se nějakou novou hru, seznamte s ní děti/své žáky a popište své zkušenosti
5. Získejte děti pro nějaký turnaj v komerčně vyráběných hrách a zúčastněte se aktivně s nimi tohoto turnaje. Popište své zkušenosti.
6. Vyberte si nějakou zde neuvedenou matematickou hru a určete pro ni vyhrávající strategii.
7. Vyberte si nějakou stolní hru a pokuste se pro ni, nebo pro její část určit optimální strategii.