

Inverzní matice

1. Věta: Nechť $A \in T^{n \times n}$ je regulérní matici.

Pak existuje jediná matici $B \in T^{n \times n}$ taková, že $AB = I$.

Pro tuto matici B platí tedy $BA = I$.

Def: B z předchozí věty nazýváme inverzní matici k matici A .
Značíme ji $B = A^{-1}$.

Dle: Provoz A je regulérní, je hodnota matici A

a hodnota rozšířené matici $A|\vec{y}$ rovná n pro každou pravou stranu $\vec{y} \in T^n$. Podle Frobeniovy věty má tedy rovnice $A\vec{x} = \vec{y}$ pro nesoudružný vektor $\vec{x} \in T^n$ právě jedno řešení. Speciálně, pro každé $i=1, 2, \dots, n$ existuje jediný vektor \vec{b}_i takový, že $A\vec{b}_i = \vec{e}_i$, kde

\vec{e}_i je i -tý vektor standardního báze.

Matica B , jejíž sloupcy jsou tvorby vektorů $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n$, má zřejmou vlastnost $A(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n) = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n) = I$.

Ukážeme, že k regulérní matici A existuje jediná matici B tak, že $AB = I$. Je-li k A^T je taky regulérní, musí

existovat matici C taková $A^T C = I$.

Z vlastnosti transpozice srovnávání matic dostaneme

$$I = I^T = (A^T C)^T = C^T (A^T)^T = C^T A. \quad \text{Nyní už je možné}$$

že $C^T = B$. To plyne z rovnosti

$$C^T = C^T I = C^T \underbrace{(AB)}_{I} = \underbrace{(C^T A)}_I B = B \quad \square$$

2. Věta: Nechť $A, B \in T^{n \times n}$. Pokud $A \cdot B = I$, pak

A i B jsou regulérní a platí $A = B^{-1}$ a $B = A^{-1}$.

Dle: Pro hodnotu srovnávání dvou matic plyne

$$h(AB) \leq \min \{h(A), h(B)\}. \quad \text{Protože } n = h(I) = h(AB),$$

dostaneme $h(A) = h(B) = n$. Tedy obě matici jsou regulérní a z předch. věty plyne že k. \square

Důkazek: Nechť $A, B \in T^{n \times n}$ jsou regulérní matice.

$$\text{Pod 1) } (A^{-1})^{-1} = A$$

$$2) (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

$$3) (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Dle: Unikomunita, t.j. $Y = X^{-1}$ znamená užitost $X Y = I$.

Proto 1) platí u vztahu $A^{-1} \cdot A = I$

$$2) \text{ ze vztahu } (A^{-1})^T \cdot A^T = (A \cdot A^{-1})^T = I^T = I$$

$$3) \text{ u vztahu } (AB) \cdot (B^{-1}A^{-1}) = I \quad \square$$

Důkaz výběr 1. na m dle výběru, že invertibilní matice když t. Prostřednictvím soustraného množinového pravidla stranou s tím, že množina invertibilní pro všechny tyto prostředky. To nazíváme užitost nejednotlivou pro všechny tyto prostředky.

$$A | \vec{e}_1 | \vec{e}_2 | \dots | \vec{e}_n$$

Připomínáme elementární řádkové úpravy na předešlou tabulku, která má n řádků a 2m sloupců.

Připomínáme, že Ežú znamená jednu z těchto úprav:

- vyměna i-tého řádku čelem $\neq 0$. Tato úprava se dá dobit vyměnou řádků v tabulce matice zleva $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *i-th řádek*

- vyměna i-tého a j-tého řádku tabulky. To odpovídá měnění řádků v tabulce matice zleva $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *i-th, j-th sloupce*

- přičtení k množení i-tého řádku k j-tému řádku. To je realizováno množením zleva matice

$$i \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$j \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tabulku, kde máme (A | I) upravíme tak druhou
až po etrickém řadě následných úpravách dostaneme (I | něco)

$$(A | I) \sim (M_1 A | M_1) \sim (M_2 M_1 A | M_2 M_1) \sim \dots$$

$$\dots \sim \underbrace{(M_k M_{k-1} \dots M_2 M_1 A | M_k M_{k-1} \dots M_1)}_I$$

Takže znamená, že součin $M_k \dots M_1 = A^{-1}$. A právě
tentou součin je rámce polovina tabulky.

Důkaz: Každou regulérní matici lze vyjádřit jako
součin matic, když realizuje ERJ.

Dle: V algoritmu jsme užiteli, řešíme inversní matici A^{-1}
lze vyjádřit součinem. Když potom A^{-1} je tedy regulérna,
i její invertce $(A^{-1})^{-1}$ lze vyjádřit jeho součin ERJ matic. □

POZN: Procesu úprav, když (A | I) přemohne pomocí
ERJ na matici (I | něco) řešíme
úplnou Gaußova eliminace.

POZN: Aplikujeme-li úplnou Gaußovou eliminaci na
tabulku (A | B), kde B je lib. matici s m řádky
a $A \in \mathbb{T}^{M \times M}$, pak na konci procesu, když máme
tabulku (I | něco) je něco = $A^{-1}B$.

Inverzní zobrazení

Nechť $F: V \rightarrow V$ je zobrazení, které je prostoře a na V .

Pak v něm existuje inverzní zobrazení $F^{-1}: V \rightarrow V$

$$\Leftrightarrow \text{platí } F \circ F^{-1} = F^{-1} \circ F = \text{Identita.}$$

Předchozí tvrzení je provedit bez ohledu na to, zda F je

lineární operátor nebo V je vektorový prostor.

Pokud všecky $F \in \mathcal{L}(V)$ a V je vekt. prostor, když je

zimního symetrické, tedy F^{-1} je taky lineární.

$F \in \mathcal{L}(V)$, kdežto je prostoře a na V , pak lze regulérní operátor

$\text{Tranzitivita v rozvedení je analogní věty 1, kdežto platí a promutuje}$

Věta: Nechť $F \in \mathcal{L}(V)$, kde V je vekt. prostor končící

dimenzí. Nechť \mathcal{C}

je báze prostoře V .

Pak pro matice inverzního zobrazení v bázi \mathcal{C} platí

$$\text{rc}(F^{-1}) = (\text{rc} F)^{-1}.$$

Dle: Vím, že $F \circ F^{-1} = \text{Identita}$. Použijme totožnost pro

matice složeného zobrazení v bázi \mathcal{C} , to znamená $\text{rc}(A \circ B) = \text{rc} A \text{rc} B$

$$\text{rc}(F \circ F^{-1}) = \text{rc} F \cdot \text{rc}(F^{-1}) = \text{rc}(\text{Identita}) = I.$$

Tedy matice $\text{rc} F$ je inverzní k matici $\text{rc}(F^{-1})$. □

Následující věta následuje, že analogie věty 2 platí pravě pro

operátory na prostorech končející dimenzí.

Věta: Nechť $F, G \in \mathcal{L}(V)$ takové, že $F \circ G = \text{Identita}$.

Pak F je zobrazení na V a G je zobrazení prostoře.

Pokud $\dim V < +\infty$, pak F a G jsou regulérní

$$\Leftrightarrow \text{platí } F = G^{-1} \text{ a } G = F^{-1}.$$

Děl: Uvažme, že F je m V :

Noch $y \in V$, pak $F(Gy) = Iy = y$.

Ovšemže $x := Gy$. Tedy k lib. $y \in V$ jde nějaké $x \in V$

tak, že $Fx = y$.

Uvažme, že G je prostř:

Noch $x_1, x_2 \in V$ splňují $Gx_1 = Gx_2$. Pak

$$\underbrace{Fx_1}_{Ix_1} = \underbrace{Fx_2}_{Ix_2}, \text{ neboli } x_1 = x_2$$

Pak budejší věty plyne z faktu, že ne pro každou kladnou

družinu platí F je regulární $\Leftrightarrow F$ je prostř $\Leftrightarrow F$ je na V .

□

Příklad: Uvažme možnost K všech konvergentních

reálných posloupností $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Ta to možnost

s obvyklými operacemi + a násobením reálným

záleží tvoří reál. prostor. Definujme na K zobrazení

$T: K \rightarrow K$ předpisem

$$(a_n)_{n=1}^{\infty} \rightarrow (a_{2n})_{n=1}^{\infty}$$

$S: K \rightarrow K$ předpisem

$$(a_n)_{n=1}^{\infty} \rightarrow (a_{\frac{n+1}{2}})_{n=1}^{\infty}$$

Pak $T \circ S = \text{Identita}$, ale

$S \circ T \neq \text{Identita}$.

$$S \circ T (a_1, a_2, a_3, a_4, \dots) = S(a_2, a_4, a_6, a_8, \dots) = \\ (a_2, a_2, a_4, a_4, a_6, a_6, \dots)$$