Elementární funkce

Edita Pelantová*

FJFI, ČVUT v Praze
Seminář současné matematiky
*katedra matematiky, FJFI, ČVUT v Praze

únor 2017

Polynomiální aproximace

K dispozici: konečný počet sčítání, odčítání, násobení a porovnání čísel.
Přesně umíme vyčíslit polynomy $p(x)$.

Co ostatní funkce $f(x)$?

Polynomiální aproximace

K dispozici: konečný počet sčítání, odčítání, násobení a porovnání čísel.
Přesně umíme vyčíslit polynomy $p(x)$.

Co ostatní funkce $f(x)$?   Taylorovy polynomy?

Polynomiální aproximace

K dispozici: konečný počet sčítání, odčítání, násobení a porovnání čísel.
Přesně umíme vyčíslit polynomy $p(x)$.

Co ostatní funkce $f(x)$? Taylorovy polynomy?

Cílem aproximace polynomem na intervalu $[a, b]$

$$\text{minimalizovat maximální chybu} \quad \max_{x \in [a,b]} |p(x) - f(x)| =: ||f - p||_\infty$$

Polynomiální aproximace

K dispozici: konečný počet sčítání, odčítání, násobení a porovnání čísel.
Přesně umíme vyčíslit polynomy $p(x)$.

Co ostatní funkce $f(x)$? Taylorovy polynomy?

Cílem aproximace polynomem na intervalu $[a, b]$

minimalizovat maximální chybu $\max_{x\in[a,b]} |p(x) - f(x)| =: ||f - p||_\infty$

Taylor je nejlepší aproximace v jiném smyslu.

Polynomiální aproximace

K dispozici: konečný počet sčítání, odčítání, násobení a porovnání čísel. Přesně umíme vyčíslit polynomy $p(x)$.

Co ostatní funkce $f(x)$? Taylorovy polynomy?

Cílem aproximace polynomem na intervalu $[a, b]$

minimalizovat maximální chybu $\max_{x \in [a,b]} |p(x) - f(x)| =: ||f - p||_\infty$

Taylor je nejlepší aproximace v jiném smyslu.

Věta (Weierstrass, 1885)

Nechť f je spojitá funkce. Pro každé $\varepsilon > 0$ existuje polynom p takový, že

$$||f - p||_\infty < \varepsilon$$

Klasické polynomy

V prostoru polynomu $\mathcal{P}_n$ hledáme polynom nejbližší k funkci f. Označení $\mathcal{P}_n =$ reálné polynomu stupně $\leq n$.

Klasické polynomy

V prostoru polynomu $\mathcal{P}_n$ hledáme polynom nejbližší k funkci f. Označení $\mathcal{P}_n =$ reálné polynomu stupně $\leq n$.

skalární součin na prostoru spojitých funkcí na intervalu $[a, b]$

Daná váha $w : (a, b) \to \mathbb{R}^+$

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)w(x)\mathrm{d}\, x$$

Klasické polynomy

V prostoru polynomu $\mathcal{P}_n$ hledáme polynom nejbližší k funkci f. Označení $\mathcal{P}_n =$ reálné polynomu stupně $\leq n$.

skalární součin na prostoru spojitých funkcí na intervalu $[a, b]$

Daná váha $w : (a, b) \to \mathbb{R}^+$

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)w(x)\mathrm{d}\,x$$

Na intervalu $[-1, 1]$

- Legendreovy polynomy: váha $w(x) = 1$

$$L_n(x) := \frac{1}{2^n n!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\,x^n} \left[(x^2 - 1)^n\right]$$

- Čebyševovy polynomy: váha $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$C_n(x) := \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos x)$$

Aproximace e^x do 2. stupně na intervalu $[-1, 1]$

Aproximace e^x do 2. stupně na intervalu $[-1, 1]$

$$L_0(x) = 1, \quad L_1(x) = x, \quad L_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - 1$$

Aproximace e^x do 2. stupně na intervalu $[-1, 1]$

$$L_0(x) = 1, \quad L_1(x) = x, \quad L_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - 1$$

$$\langle e^x, L_0 \rangle = e - e^{-1}, \quad \langle e^x, L_1 \rangle = 2e^{-1}, \quad \langle e^x, L_2 \rangle = e - 7e^{-1}$$

Aproximace e^x do 2. stupně na intervalu $[-1, 1]$

$$L_0(x) = 1, \quad L_1(x) = x, \quad L_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - 1$$

$$\langle e^x, L_0 \rangle = e - e^{-1}, \quad \langle e^x, L_1 \rangle = 2e^{-1}, \quad \langle e^x, L_2 \rangle = e - 7e^{-1}$$

$$\langle L_0, L_0 \rangle = 2, \quad \langle L_1, L_1 \rangle = \tfrac{2}{3}, \quad \langle L_2, L_2 \rangle = \tfrac{2}{3}$$

Aproximace e^x do 2. stupně na intervalu $[-1, 1]$

$$L_0(x) = 1, \quad L_1(x) = x, \quad L_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - 1$$

$$\langle e^x, L_0 \rangle = e - e^{-1}, \quad \langle e^x, L_1 \rangle = 2e^{-1}, \quad \langle e^x, L_2 \rangle = e - 7e^{-1}$$

$$\langle L_0, L_0 \rangle = 2, \quad \langle L_1, L_1 \rangle = \tfrac{2}{3}, \quad \langle L_2, L_2 \rangle = \tfrac{2}{3}$$

Aproximace pomocí Legendrea

$$\tfrac{15}{4}(e - \tfrac{7}{e})x^2 + \tfrac{3}{e}x + \tfrac{33}{4e} - \tfrac{3}{4e} \simeq 0.5367215x^2 + 1.103683x + 0.9962940$$

Aproximace e^x do 2. stupně na intervalu $[-1, 1]$

$$L_0(x) = 1, \quad L_1(x) = x, \quad L_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - 1$$

$$\langle e^x, L_0 \rangle = e - e^{-1}, \quad \langle e^x, L_1 \rangle = 2e^{-1}, \quad \langle e^x, L_2 \rangle = e - 7e^{-1}$$

$$\langle L_0, L_0 \rangle = 2, \quad \langle L_1, L_1 \rangle = \tfrac{2}{3}, \quad \langle L_2, L_2 \rangle = \tfrac{2}{3}$$

Aproximace pomocí Legendrea

$$\tfrac{15}{4}(e - \tfrac{7}{e})x^2 + \tfrac{3}{e}x + \tfrac{33}{4e} - \tfrac{3}{4e} \simeq 0.5367215x^2 + 1.103683x + 0.9962940$$

Aproximace pomocí Čebyševa

$$0.5429906776x^2 + 1.130318208x + 0.9945705392$$

Porovnání kvality aproximace

$$\max_{x\in[-1,1]} |p(x) - e^x| = \text{maximální chyba}$$

Max.Error $= 0.218$ pro Taylora
Max.Error $= 0.081$ pro Legendrea
Max.Error $= 0.050$ pro Čebyševa

Porovnání kvality aproximace

$$\max_{x\in[-1,1]} |p(x) - e^x| = \text{maximální chyba}$$

Max.Error $= 0.218$ pro Taylora
Max.Error $= 0.081$ pro Legendrea
Max.Error $= 0.050$ pro Čebyševa

Hledáme polynom $p^*(x)$ stupně $\leq n$ tak, aby

$$||f - p^*||_\infty = \min_{p\in\mathcal{P}_n} ||f - p||_\infty$$

Jak hledat takové p^* ?

Nejlepší aproximace na intervalu

Věta (Čebyšev)

Polynom p stupně $\leq n$ je nejlepší aproximace funkce f na intervalu $[a, b]$ právě tehdy, když existuje alespoň $n+2$ bodů

$$a \leq x_0 < x_1 < \ldots < x_n < x_{n+1} \leq b$$

takových, že

$$p^*(x_i) - f(x_i) = (-1)^i [p^*(x_0) - f(x_0)] = \pm||f - p^*||_\infty$$

Nejlepší aproximace e^x do 2. stupně na intervalu $[-1, 1]$

Hledáme polynom $p^*(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ a body $x_0 < x_1 < x_2 < x_3$ tak, aby ... Čebyševova věta

Nejlepší aproximace e^x do 2. stupně na intervalu $[-1, 1]$

Hledáme polynom $p^*(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ a body $x_0 < x_1 < x_2 < x_3$ tak, aby ... Čebyševova věta

$x_0 = -1, x_3 = 1$ (z konvexnosti funkce e^x) a derivace $e^x - p^*(x)$ je nulová v bodech x_1 a x_2 (body extrému)

$$
\begin{aligned}
a_0 - a_1 + a_2 - e^{-1} &= +\epsilon \\
a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 - e^{x_1} &= -\epsilon \\
a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 - e^{x_2} &= +\epsilon \\
a_0 + a_1 + a_2 - e &= -\epsilon \\
a_1 + 2a_2 x_1 - e^{x_1} &= 0 \\
a_1 + 2a_2 x_2 - e^{x_2} &= 0
\end{aligned}
$$

Nejlepší aproximace e^x do 2. stupně na intervalu $[-1, 1]$

Nejlepší aproximace, chyba $= 0.045$

$$p^*(x) = 0.55404091x^2 + 1.130318381x + 0.98003973$$

Nejlepší aproximace e^x do 2. stupně na intervalu $[-1, 1]$

Nejlepší aproximace, chyba $=0.045$

$$p^*(x) = 0.55404091x^2 + 1.130318381x + 0.98003973$$

Aproximace pomocí Legendrea, chyba $= 0.081$

$$p(x) = 0.5367215x^2 + 1.103683x + 0.9962940$$

Aproximace pomocí Čebyševa, chyba $=0.050$

$$p(x) = 0.5429906776x^2 + 1.130318208x + 0.9945705392$$

Aproximace pomocí Taylora, chyba $=0.218$

$$p(x) = 0.5x^2 + x + 1$$

Racionální aproximace

Když máme k dispozici přesné dělení,

Racionální aproximace

Když máme k dispozici přesné dělení, vhodné racionální aproximace

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \quad \text{kde} \ \ p(x), q(x) \text{ jsou polynomy}$$

Racionální aproximace

Když máme k dispozici přesné dělení, vhodné racionální aproximace

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \quad \text{kde} \;\; p(x), q(x) \text{ jsou polynomy}$$

Věta (Čebyšev)

Ireducibilní racionální funkce $r^*(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ je nejlepší aproximací funkce f na $[a, b]$ mezi racionálními funkcemi z $\mathcal{R}_{n,m}$ právě tehdy, když existuje alespoň

$$k = 2 + \max\{m + deg(p), n + deg(q)\}$$

bodů $a \leq x_0 < x_1 < \ldots < x_{k-1} \leq b$ takových, že

$$r^*(x_i) - f(x_i) = (-1)^i [r^*(x_0) - f(x_0)] = \pm ||f - r^*||_\infty$$

vhodné na "vysoce nepolynomiální" funkce (limity $\pm\infty$ v konečných bodech, nekonečné derivace...)

Aproximace funkce tg na intervalu $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$

Nejlepší aproximace polynomem z $\mathcal{P}_{13}$
chyba $= 8 \times 10^{-9}$, vyčíslujeme 14 operací

$$p^*(x) = 1.00000014609 + 0.333324808x^3 + 0.13347672x^5 +$$
$$+0.0529139x^7 + 0.0257829x^9 + 0.0013562x^{11} + 0.010269x^{13}$$

Aproximace funkce tg na intervalu $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$

Nejlepší aproximace polynomem z $\mathcal{P}_{13}$
chyba $= 8 \times 10^{-9}$, vyčíslujeme 14 operací

$$p^*(x) = 1.00000014609 + 0.333324808x^3 + 0.13347672x^5 +$$
$$+0.0529139x^7 + 0.0257829x^9 + 0.0013562x^{11} + 0.010269x^{13}$$

Nejlepší aproximace mezi $\mathcal{R}_{3,4}$
chyba $= 7 \times 10^{-9}$, vyčíslujeme 8 operací

$$r^*(x) = \frac{0.9999999328x - 0.095875045x^3}{1 - 0.429209672x^2 + 0.009743234x^4}$$

Tabulkové aproximace

Interval, na kterém chceme funkci počítat, rozdělíme na menší intervaly a na každém počítame funkci pomocí jiné aproximace.

Interval	Stupeň	Chyba
$[0, \frac{\pi}{4}]$	5	0.609×10^{-7}
$[0, \frac{\pi}{4}]$	6	0.410×10^{-8}
$[0, \frac{\pi}{4}]$	7	0.418×10^{-10}
$[0, \frac{\pi}{8}]$	5	0.486×10^{-9}
$(\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}]$	5	0.138×10^{-8}
$[0, \frac{\pi}{16}]$	5	0.382×10^{-11}
$(\frac{\pi}{16}, \frac{\pi}{8}]$	5	0.113×10^{-10}
$(\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{16}]$	5	0.183×10^{-10}
$(\frac{3\pi}{16}, \frac{\pi}{4}]$	5	0.246×10^{-10}

Tabulkové aproximace

Interval, na kterém chceme funkci počítat, rozdělíme na menší intervaly a na každém počítame funkci pomocí jiné aproximace.

Interval	Stupeň	Chyba
$[0, \frac{\pi}{4}]$	5	0.609×10^{-7}
$[0, \frac{\pi}{4}]$	6	0.410×10^{-8}
$[0, \frac{\pi}{4}]$	7	0.418×10^{-10}
$[0, \frac{\pi}{8}]$	5	0.486×10^{-9}
$(\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}]$	5	0.138×10^{-8}
$[0, \frac{\pi}{16}]$	5	0.382×10^{-11}
$(\frac{\pi}{16}, \frac{\pi}{8}]$	5	0.113×10^{-10}
$(\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{16}]$	5	0.183×10^{-10}
$(\frac{3\pi}{16}, \frac{\pi}{4}]$	5	0.246×10^{-10}
- Pozor! Norma vyžaduje monotonii sin

Tabulkové aproximace

Obecně: čím menší interval, na kterém aproximujeme polynomem, tím lepší přesnost.

Uvažujme interval $[0, a]$

a	$\arctan x$, deg. 10	e^x, deg.4	$\ln(1+x)$, deg.5
5	0.00011	0.83	0.0021
2	1.0×10^{-6}	0.0015	0.00013
1	1.9×10^{-9}	0.000027	8.7×10^{-6}
0.1	3.6×10^{-19}	1.7×10^{-10}	6.1×10^{-11}
0.01	4.3×10^{-30}	1.6×10^{-15}	7.9×10^{-17}

Tabulkové aproximace funkce $\sin x$ na $[0, \frac{\pi}{4}]$

- v tabulce uloženy velice přesné hodnoty $\sin c_j$ a $\cos c_j$, kde $c_j = \frac{j}{16}$ pro $j = 0, 1, \dots, 14$
- k dispozici je dobrá polynomiální aproximace $\sin x$ a $\cos x$ na $[0, \frac{1}{32}]$

Algoritmus (Tangova metoda 1991)

1. Pro $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$ nalezni nejbližší c_j a polož $r = x - c_j$.
2. Spočítej $\sin r$ a $\cos r$ pomocí polynomiální aproximace.
3. Spočítej $\sin x = \sin c_j \cos r + \cos c_j \sin r$.

"Shift and Add" algoritmy

Když $x = \sum_{i=0}^{\infty} d_i \ln(1+2^{-i})$, kde $d_i \in \{0,1\}$, pak

$$\exp x = \exp\left(\sum_{i=0}^{\infty} d_i \ln(1+2^{-i})\right) = \prod_{i=0}^{\infty}(1+2^{-i})^{d_i}$$

"Shift and Add" algoritmy

Když $x = \sum_{i=0}^{\infty} d_i \ln(1+2^{-i})$, kde $d_i \in \{0,1\}$, pak

$$\exp x = \exp\Big(\sum_{i=0}^{\infty} d_i \ln(1+2^{-i})\Big) = \prod_{i=0}^{\infty} (1+2^{-i})^{d_i}$$

výpočet e^x

$$E_0 := 1, \quad E_n = E_{n-1}(1+d_n 2^{-n}) = E_{n-1} + d_n 2^{-n} E_{n-1}$$

"Shift and Add" algoritmy

Když $x = \sum\limits_{i=0}^{\infty} d_i \ln(1+2^{-i})$, kde $d_i \in \{0,1\}$, pak

$$\exp x = \exp\Big(\sum_{i=0}^{\infty} d_i \ln(1+2^{-i})\Big) = \prod_{i=0}^{\infty} (1+2^{-i})^{d_i}$$

výpočet e^x

$$E_0 := 1, \quad E_n = E_{n-1}(1+d_n 2^{-n}) = E_{n-1} + d_n 2^{-n} E_{n-1}$$

Kvůli odhadu chyby:

$$\frac{\exp x}{E_n} = \exp\Big(\sum_{i=n+1}^{\infty} d_i \ln(1+2^{-i})\Big) < \exp\Big(\sum_{i=n+1}^{\infty} 2^{-i}\Big) = \exp(\tfrac{1}{2^n})$$

Pro $x \in [0, \ln 2]$

$$0 \le e^x - E_n = \Big(1 - \frac{E_n}{e^x}\Big) e^x < 2\big(1 - e^{-\frac{1}{2^n}}\big) \le \frac{1}{2^{n-1}}$$

Rozvoje čísla do nekonečných řad

Věta

Nechť (w_n) je klesající posloupnost kladných čísel taková, že $\sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n$ je konvergentní a $w_n \leq \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} w_k$. Pak pro každé $x \in [0, \sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n]$ posloupnosti (t_n) a (d_n) definované jako

$$t_0 = 0, \quad t_{n+1} = t_n + d_n w_n, \quad d_n = \begin{cases} 1 & \text{když } t_n + w_n \leq x \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

splňují

$$x = \lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} d_k w_k$$

Rozvoj do řady $\sum d_n \ln(1+2^{-n})$

Tabelovány hodnoty $w_n = \ln(1+2^{-n})$ pro $n = 1, 2, 3, \ldots$

Algoritmus: vstup x a požadovaná přesnost N

polož $t_0 = 0$ a pro $n = 1, 2, \ldots, N$ dělej

$$t_{n+1} = t_n + d_n \ln(1+2^{-n}), \quad d_n = \begin{cases} 1 & \text{když } t_n + \ln(1+2^{-n}) \leq x \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$\sum \ln(1+2^{-n}) > 1$, proto algoritmus funguje pro $x \in [0,1]$
Pozor! Porovnání je časově náročné u dlouhých čísel!

Posun proměnné do vhodného intervalu

Co velká x ?

Algoritmus: vstup x

1. Najdi $k \in \mathbb{N}$ tak, aby $y = x - k \ln 2 \in [0, \ln 2]$
2. Spočítej předchozí metodou e^y
3. Polož $e^x = e^{y+k \ln 2} = 2^k e^y$ (tedy posuň binární tečku v e^y o k míst)

Algoritmus CORDIC pro sin a cos

Rozvoj $\theta = \sum_{n=0}^{\infty} d_n \arctan 2^{-n}$, kde $d_n = \pm 1$.
Tabelováno $\arctan 2^{-n}$

Algoritmus CORDIC pro sin a cos

Rozvoj $\theta = \sum_{n=0}^{\infty} d_n \arctan 2^{-n}$, kde $d_n = \pm 1$.
Tabelováno $\arctan 2^{-n}$

vstup: $z_0 := \theta, \ \ x_0 := 1, \ \ y_0 := 0$

$x_{n+1} := x_n - d_n y_n 2^{-n}$
$y_{n+1} := y_n + d_n x_n 2^{-n}$
$z_{n+1} := z_n - d_n \arctan 2^{-n}$
$d_{n+1} := sign \ z_{n+1}$

Algoritmus CORDIC pro sin a cos

Rozvoj $\theta = \sum_{n=0}^{\infty} d_n \arctan 2^{-n}$, kde $d_n = \pm 1$.
Tabelováno $\arctan 2^{-n}$

vstup: $z_0 := \theta, \;\; x_0 := 1, \;\; y_0 := 0$

$$x_{n+1} := x_n - d_n y_n 2^{-n}$$
$$y_{n+1} := y_n + d_n x_n 2^{-n}$$
$$z_{n+1} := z_n - d_n \arctan 2^{-n}$$
$$d_{n+1} := sign \; z_{n+1}$$

Věta: Položme $K = \prod_{n=0}^{\infty} \sqrt{1 + 2^{-2n}} = 1.64676025821\ldots$. Pak

$\lim x_n = K \, \cos\theta \quad$ a $\quad \lim y_n = K \, \sin\theta \quad$ a $\quad \lim z_n = 0$

Algoritmus CORDIC pro sin a cos

Rozvoj $\theta = \sum_{n=0}^{\infty} d_n \arctan 2^{-n}$, kde $d_n = \pm 1$.
Tabelováno $\arctan 2^{-n}$

vstup: $z_0 := \theta, \;\; x_0 := 1, \;\; y_0 := 0$

$$x_{n+1} := x_n - d_n y_n 2^{-n}$$
$$y_{n+1} := y_n + d_n x_n 2^{-n}$$
$$z_{n+1} := z_n - d_n \arctan 2^{-n}$$
$$d_{n+1} := sign\ z_{n+1}$$

Věta: Položme $K = \prod_{n=0}^{\infty} \sqrt{1 + 2^{-2n}} = 1.64676025821\ldots$. Pak

$$\lim x_n = K \cos\theta \quad \text{a} \quad \lim y_n = K \sin\theta \quad \text{a} \quad \lim z_n = 0$$

Další problémy k řešení

- Posun proměnné do vhodného intervalu "Range reduction"
- přesné vyčíslování polynomu (Hornerovo schema, Knuthova metoda)
- Zaokrouhlování k nejbližšímu "machine number".

Další problémy k řešení

- Posun proměnné do vhodného intervalu "Range reduction"
- přesné vyčíslování polynomu (Hornerovo schema, Knuthova metoda)
- Zaokrouhlování k nejbližšímu "machine number". Paradoxy: podle normy IEEE-754 single precision arithmetic, nejbližší machine number k $\frac{\pi}{2}$ je

$$\ell = \frac{13176795}{8388608} = 1.57079637050628662109375 > \frac{\pi}{2}$$

Další problémy k řešení

- Posun proměnné do vhodného intervalu "Range reduction"
- přesné vyčíslování polynomu (Hornerovo schema, Knuthova metoda)
- Zaokrouhlování k nejbližšímu "machine number". Paradoxy: podle normy IEEE-754 single precision arithmetic, nejbližší machine number k $\frac{\pi}{2}$ je

$$\ell = \frac{13176795}{8388608} = 1.57079637050628662109375 > \frac{\pi}{2}$$

pro $x \geq 62919776$,

$$\tan(\arctan x) = -22877332 = \tan(\ell)$$

Další problémy k řešení

- Posun proměnné do vhodného intervalu "Range reduction"
- přesné vyčíslování polynomu (Hornerovo schema, Knuthova metoda)
- Zaokrouhlování k nejbližšímu "machine number". Paradoxy: podle normy IEEE-754 single precision arithmetic, nejbližší machine number k $\frac{\pi}{2}$ je

$$\ell = \frac{13176795}{8388608} = 1.57079637050628662109375 > \frac{\pi}{2}$$

pro $x \geq 62919776$,

$$\tan(\arctan x) = -22877332 = \tan(\ell)$$

- Programy Maple, Mathematica, Mathlab, Sage: Práce v tělesech $\mathbb{Q}[\beta]$, kde β kořen polynomu s racionálními koeficienty. Do této kategorie patří všechny úlohy s vlastními čísly a vektory racionálních matic.