Pokrývání grafů kružnicemi a cestami

Jana Maxová

Ústav matematiky VŠCHT Praha

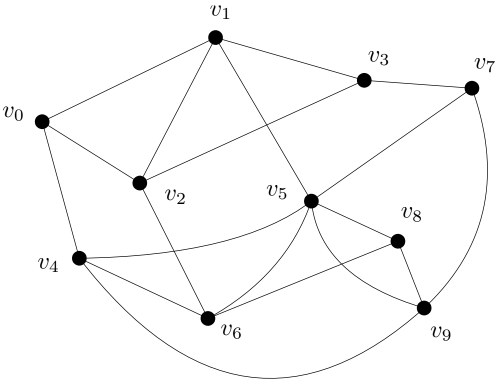
Seminář současné matematiky, 12. dubna 2017

Obsah přednášky

- Teorie grafů - úvod
- Eulerův problém a pokrývání kružnicemi
- Pokrývání grafů cestami
- Orientované pokrývání grafů cestami

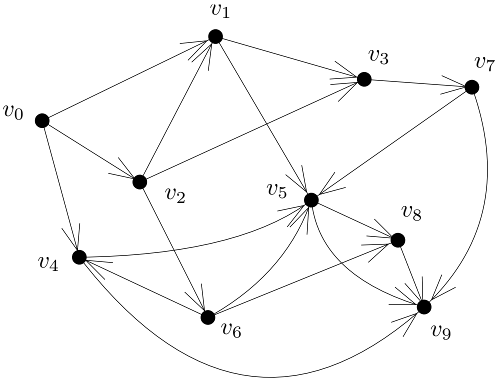
Grafy

(neorientovaný) graf $G = (V, E)$



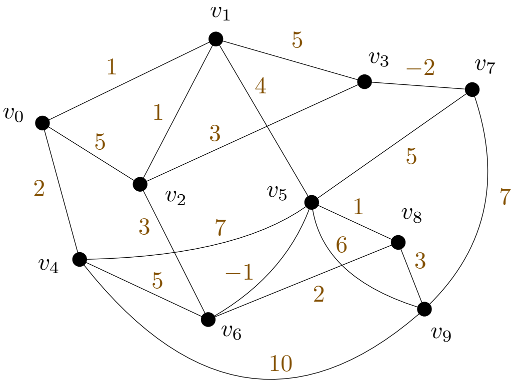
Orientované grafy

orientovaný graf $G = (V, \overrightarrow{E})$



Ohodnocené grafy

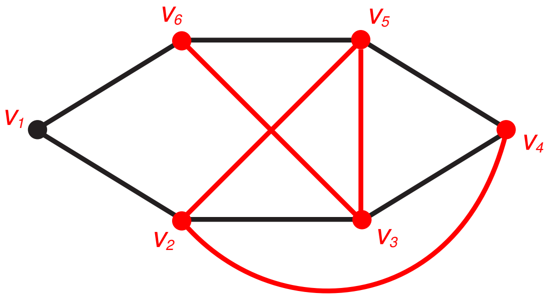
hranově ohodnocený graf $G = (V, E, w), \quad w : E \to \mathbb{R}$



Základní definice - neorientované grafy

- cesta v grafu $P = v_0, v_1, \ldots v_n, \quad$ t.ž. $\{v_i, v_{i+1}\} \in E; v_i \neq v_j$

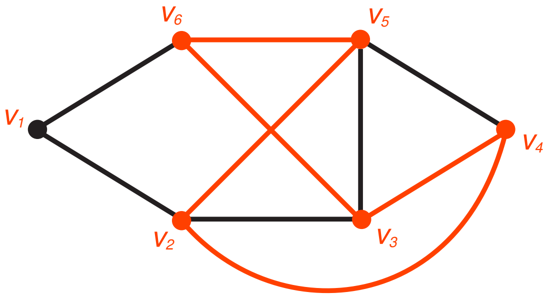
$$P = v_6, v_3, v_5, v_2, v_4$$



Základní definice - neorientované grafy

- cesta v grafu
- kružnice v grafu $C = v_0, v_1, \ldots v_n,$ cesta + hrana $\{v_n, v_0\}$.

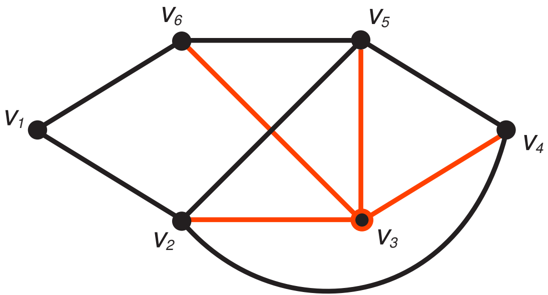
$$C = v_6, v_3, v_4, v_2, v_5$$



Základní definice - neorientované grafy

- cesta v grafu
- kružnice v grafu
- stupeň vrcholu = počet hran z v

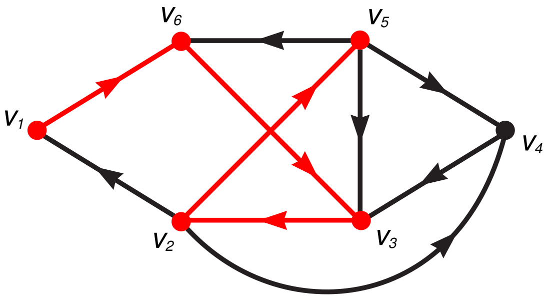
$$deg(v_3) = 4$$



Základní definice- orientované grafy

- orientovaná cesta $P = v_0, v_1, \dots v_n, \quad$ t.ž. $(v_i, v_{i+1}) \in \overrightarrow{E}; v_i \neq v_j$

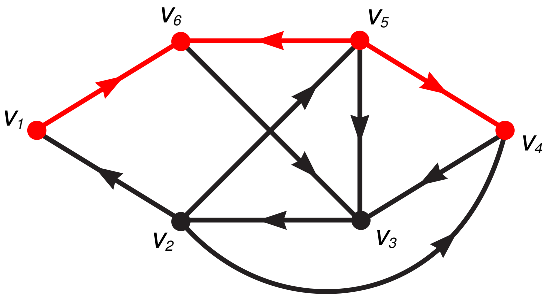
$$P = v_1, v_6, v_3, v_2, v_5$$



Základní definice- orientované grafy

- orientovaná cesta $P = v_0, v_1, \dots v_n$, t.ž. $(v_i, v_{i+1}) \in \overrightarrow{E}$; $v_i \neq v_j$

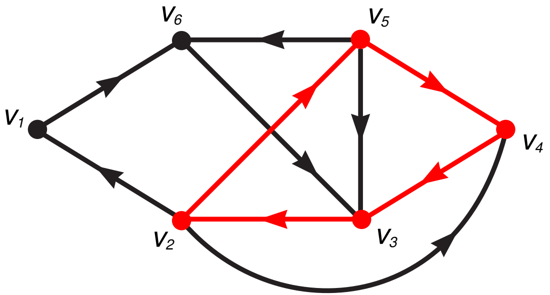
v_1, v_6, v_5, v_4 není orientovaná cesta



Základní definice- orientované grafy

- orientovaná cesta
- orientovaná kružnice $C = v_0, v_1, \ldots v_n,$ or. cesta + or. hrana (v_n, v_0).

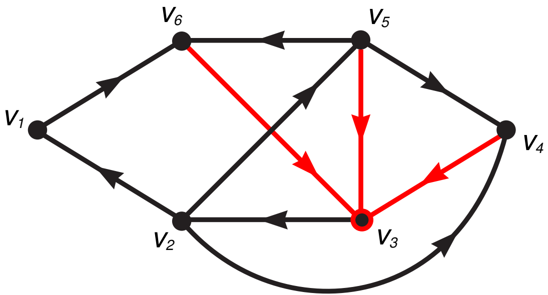
$$P = v_2, v_5, v_4, v_3$$



Základní definice- orientované grafy

- orientovaná cesta
- orientovaná kružnice
- vstupní stupeň vrcholu

$$deg^{IN}(v_3) = 3$$

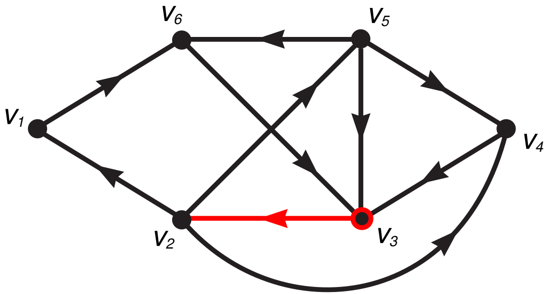


Základní definice- orientované grafy

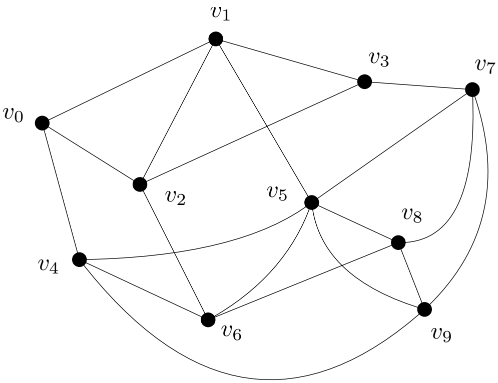
Pro neorientované grafy:

- orientovaná cesta
- orientovaná kružnice
- vstupní stupeň vrcholu
- výstupní stupeň vrcholu

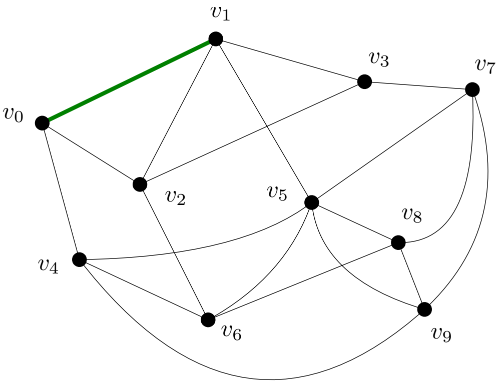
$$deg^{OUT}(v_3) = 1$$



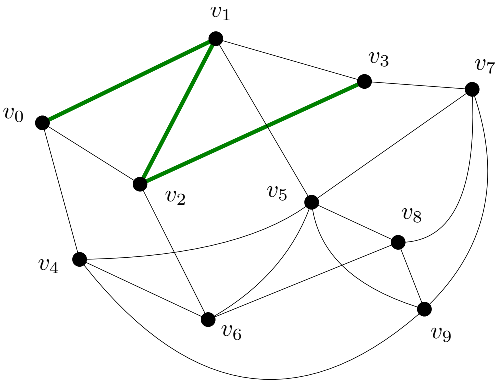
Kreslení grafu jedním tahem - L. Euler, 1736



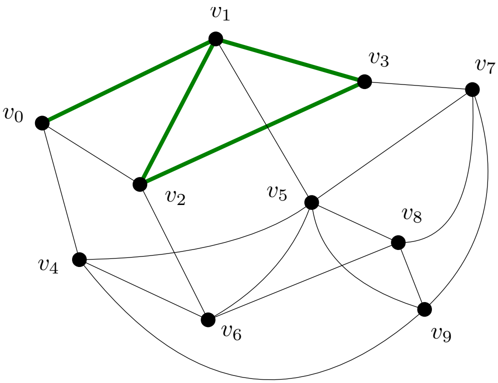
Kreslení grafu jedním tahem - L. Euler, 1736



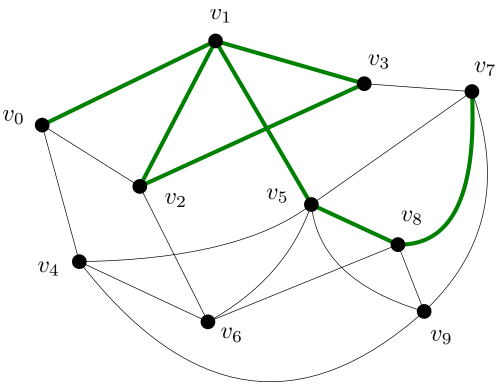
Kreslení grafu jedním tahem - L. Euler, 1736



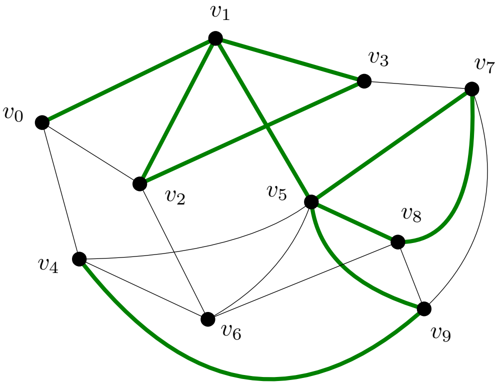
Kreslení grafu jedním tahem - L. Euler, 1736



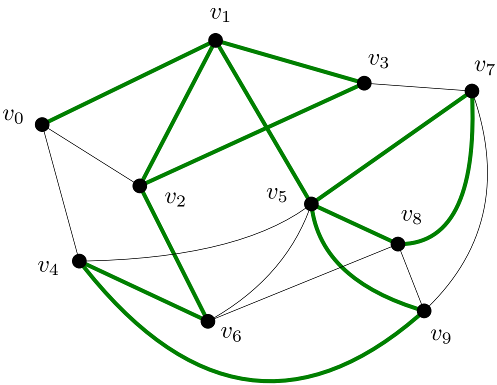
Kreslení grafu jedním tahem - L. Euler, 1736



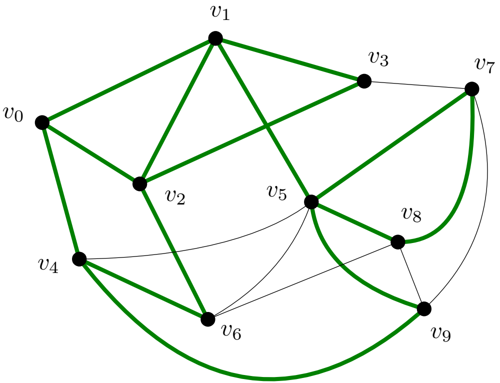
Kreslení grafu jedním tahem - L. Euler, 1736



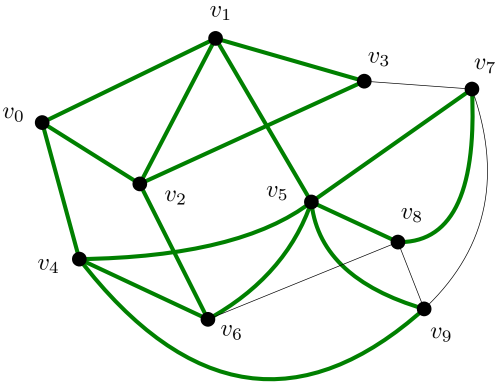
Kreslení grafu jedním tahem - L. Euler, 1736



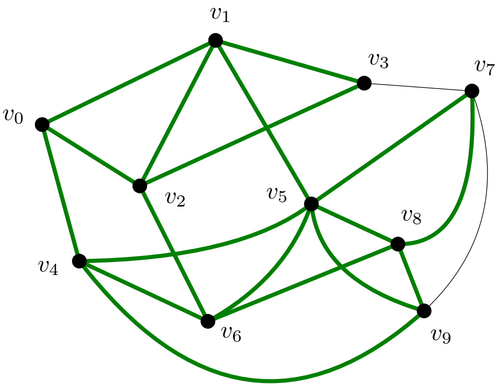
Kreslení grafu jedním tahem - L. Euler, 1736



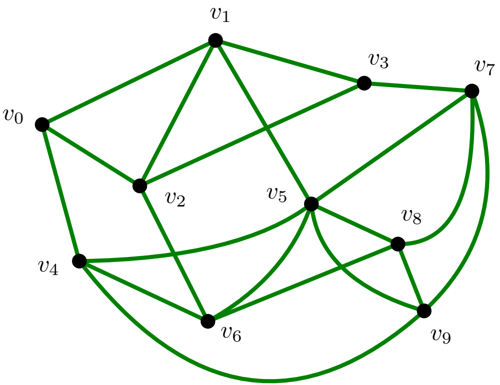
Kreslení grafu jedním tahem - L. Euler, 1736



Kreslení grafu jedním tahem - L. Euler, 1736



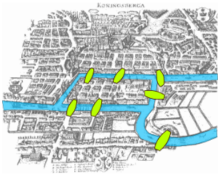
Kreslení grafu jedním tahem - L. Euler, 1736

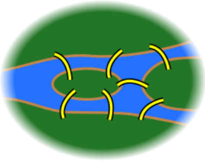


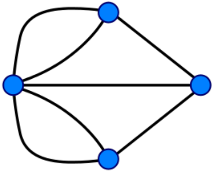
Problém sedmi mostů města Královce

Otázka:

Je možné projít městem tak, abychom na každý most vstoupili právě jednou?







Odpověď [L. Euler, 1736]: Není to možné.

Různé formulace Eulerovy úlohy

Věta (L. Euler, 1736)

Pro souvislý graf G jsou následující tvrzení ekvivalentní:

Graf G lze nakreslit jedním uzavřeným tahem.

$$\Updownarrow$$

Všechny vrcholy grafu G mají sudý stupeň.

$$\Updownarrow$$

Graf G je disjunktním sjednocením kružnic.

$$E(G) = E(C_1) \,\dot{\cup}\, E(C_2) \,\dot{\cup}\, \ldots \,\dot{\cup}\, E(C_k)$$

(Tj. existují kružnice $C_1, \ldots, C_k$ v grafu G takové,
že každá hrana grafu G je obsažena právě v jedné kružnici C_i.)

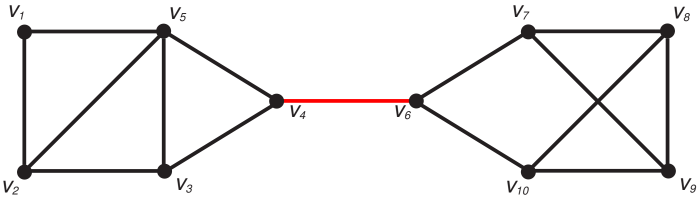
Dvojpokrývání kružnicemi

"Malá"změna:

Otevřený problém

Za jakých podmínek existují v grafu G kružnice $C_1, \ldots, C_k$ takové, že každá hrana grafu G je obsažena právě ve **dvou** *kružnicích C_i, C_j.*

Nutná podmínka: G nesmí mít "most"



hrana $\{v_4, v_6\}$ tvoří most

CDC conjecture

Hypotéza (Circuit double cover conjecture, 1979)

V každém grafu bez mostů existuje soubor kružnic $C_1, \ldots, C_k$ takových, že každá hrana grafu G je obsažena právě ve dvou těchto kružnicích.

Pozn. Existuje mnoho různých variant CDC conjecture (všechny otevřené).

- orientace $\leftrightarrows$
- jedna kružnice pevně dána
- G má všechny vrcholy stupně 3
- ...

Hypotéza (Small circuit double cover conjecture, 1990)

V každém grafu bez mostů existuje soubor nejvýše $|V(G)| - 1$ kružnic takový, že každá hrana grafu G je obsažena právě ve dvou těchto kružnicích.

Dvojpokrývání cestami

Definice (Perfect path double cover, 1990)

Nechť $\mathcal{P} = \{P_1, \ldots, P_n\}$ *je soubor cest v grafu G takových, že platí:*

- *každý vrchol je koncovým vrcholem právě dvou cest z* $\mathcal{P}$,
- *každá hrana leží v právě dvou cestách z* $\mathcal{P}$.

Potom $\mathcal{P}$ *nazýváme perfektní dvojpokrytí grafu G cestami (PPDC grafu G).*

Základní pozorování:

Má-li graf G small CDC a v je vrchol stupně $|V(G)| - 1$,

$$\Downarrow$$

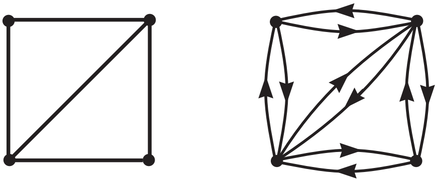
graf $G \setminus v$ má PPDC.

Věta (H. Li, 1990)

Každý graf má PPDC.

Orientované dvojpokrývání cestami

$S(G)$ symetrická orientace G ($\forall$ hrana nahrazena dvěma šipkami $\rightleftarrows$)



Orientované dvojpokrývání cestami

$S(G)$ symetrická orientace G ($\forall$ hrana nahrazena dvěma šipkami $\rightleftarrows$)

Definice (Oriented perfect path double cover, 1990)

Nechť $\mathcal{P}$ je soubor orientovaných cest v grafu $S(G)$ takových, že platí:

- *každý vrchol je počátečním vrcholem právě jedné cesty z $\mathcal{P}$,*
- *každý vrchol je koncovým vrcholem právě jedné cesty z $\mathcal{P}$,*
- *každá orientovaná hrana (šipka) $S(G)$ leží právě v jedné cestě z $\mathcal{P}$.*

Potom $\mathcal{P}$ nazýváme orientované perfektní dvojpokrytí grafu G cestami (OPPDC grafu G).

Základní pozorování funguje stejně:

Má-li graf G oriented small CDC a v je vrchol stupně $|V(G)| - 1$,

$$\Downarrow$$

graf $G \setminus v$ má OPPDC.

Co je známo o OPPDC

Věta (J. M.,1998)

Úplné grafy K_3 a K_5 nemají OPPDC.

Grafy, které mají OPPDC:

- úplné grafy K_n, $n \neq 3$, $n \neq 5$
- stromy
- kružnice na $n \geq 4$ vrcholech
- úplné bipartitní grafy $K_{m,n}$ $\forall m, n$
- grafy, které mají všechny stupně liché
- a pár dalších

Hypotéza (OPPDC conjecture, J. M., J. Nešetřil, 2001)

K_3 a K_5 jediné souvislé grafy bez OPPDC.

Cíle případné bakalářské práce

- provést rešerši
  1. H. Li: Perfect path double covers in every simple graph, J. Graph Theory 14, 1990
  2. J. Maxová: Orientované perfektní dvojpokrytí cestami, 1998 (diplom. práce)
  3. J. Maxová, J. Nešetřil: On oriented path double covers, Discrete Math., 2001
  4. B. Bagheri Gh., B. Omoomi: On the oriented perfect path double cover conjecture, Bulletin of the Iranian Math. Soc., 2015
- zkusit s pomocí počítače najít další příklady grafů bez OPPDC
- zkusit najít další třídy grafů, které mají OPPDC