1 Stolzova věta

Věta 1.1. *Nechť (a_n) a (b_n) jsou reálné posloupnosti s vlastnostmi:*

1. *pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $b_n > 0$;*
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} b_i = +\infty$ *;*
3. *existuje $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n}$, označme ji L.*

Pak

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{\sum_{i=1}^{n} b_i} = L$$

Důkaz. Nejdříve uvedeme pomocnou nerovnost, kterou lze ověřit jednoduchým roznásobením: Jsou-li x_1, x_2 reálná a y_1, y_2 reálná kladná čísla, pak

$$\frac{x_1}{y_1} \leq \frac{x_2}{y_2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{x_1}{y_1} \leq \frac{x_1+x_2}{y_1+y_2} \leq \frac{x_2}{y_2}$$

Využitím této nerovnosti dostaneme matematickou indukcí, že za předpokladu $y_i > 0$ pro $i = 1, \ldots, k$, platí

$$\min_{1\leq i\leq k} \left\{ \frac{x_i}{y_i} \right\} \leq \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i}{\sum_{i=1}^{k} y_i} \leq \max_{1\leq i\leq k} \left\{ \frac{x_i}{y_i} \right\}$$

A teď k důkazu samotné Stolzovy věty. Zvolme libovolně, ale pevně, $m \in \mathbb{N}$. Předopoklad 1) ve znění věty a předchozí nerovnost dávájí

$$\min_{m\leq i\leq n} \left\{ \frac{a_i}{b_i} \right\} \leq \frac{\sum_{i=m}^{n} a_i}{\sum_{i=m}^{n} b_i} \leq \max_{m\leq i\leq n} \left\{ \frac{a_i}{b_i} \right\} \qquad \text{pro každé } \ n > m \tag{1}$$

Pro zjednodušení zápisu zavedeme značení

$$A_n := \sum_{i=1}^{n} a_i \quad \text{a} \quad B_n := \sum_{i=1}^{n} b_i$$

Pokračujeme v odhadech v nerovnici (1), což v novem značení lze zapsat

$$\inf_{m\leq i} \left\{ \frac{a_i}{b_i} \right\} \leq \frac{A_n - A_m}{B_n - B_m} \leq \sup_{m\leq i} \left\{ \frac{a_i}{b_i} \right\} \tag{2}$$

Pro pevné m máme tedy členy posloupnosti $\left(\frac{A_n - A_m}{B_n - B_m} \right)_{n=m}^{+\infty}$ odhadnuty výrazy, které na n nezávisí. Tedy $\inf_{m\leq i} \left\{ \frac{a_i}{b_i} \right\}$ a $\sup_{m\leq i} \left\{ \frac{a_i}{b_i} \right\}$ jsou dolní, resp. horní závorou zmíněné posloupnosti. Proto

$$\inf_{m\leq i} \left\{ \frac{a_i}{b_i} \right\} \leq \liminf \frac{A_n - A_m}{B_n - B_m} \leq \limsup \frac{A_n - A_m}{B_n - B_m} \leq \sup_{m\leq i} \left\{ \frac{a_i}{b_i} \right\} \tag{3}$$

Zvolme nyní libovolnou ostře rostoucí posloupnost přirozených čísel (k_n) tak, aby existovala $\lim \frac{A_{k_n}}{B_{k_n}}$. Předpoklad 2) ve větě, tj. $\lim B_n = +\infty$, zaručuje, že pro libovolné konstanty c_1, c_2 platí

$$\lim \frac{A_{k_n}}{B_{k_n}} = \lim \frac{A_{k_n} + c_1}{B_{k_n} + c_2}$$

To implikuje pro libovolné c_1, c_2

$$\limsup \frac{A_n}{B_n} = \limsup \frac{A_n + c_1}{B_n + c_2} \qquad \text{a} \qquad \liminf \frac{A_n}{B_n} = \liminf \frac{A_n + c_1}{B_n + c_2} \tag{4}$$

Dosazním vzthaů (4) do nerovnice (3) dostaneme

$$\inf_{m \leq i} \left\{ \frac{a_i}{b_i} \right\} \ \leq \ \liminf \frac{A_n}{B_n} \ \leq \limsup \frac{A_n}{B_n} \ \leq \sup_{m \leq i} \left\{ \frac{a_i}{b_i} \right\} \tag{5}$$

Nyní už dva prostřední členy nerovnosti nezávisí na žádném indexu, ani n ani m. Protože (5) platí pro každé $m \in \mathbb{N}$, lze po limitním přechodu pro $m \to +\infty$ s využitím důsledku **??** napsat

$$\liminf \frac{a_n}{b_n} \ \leq \ \liminf \frac{A_n}{B_n} \ \leq \limsup \frac{A_n}{B_n} \ \leq \limsup \frac{a_n}{b_n}$$

Když ještě vezmeme do úvahy předpoklad 3) věty, je důkaz hotov.

□

V důkazu Stolzovy věty jsme zavedli nové psoloupnosti $A_n = \sum_{i=1}^n a_i$ a $B_n = \sum_{i=1}^n b_i$. Pro ně zřejmě platí $a_n = A_n - A_{n-1}$ a $b_n = B_n - B_{n-1}$. Často lze vidět Stolzovu věty ve znění, kde místo posloupnostií (a_n) a (b_n) vystupují (A_n) a (B_n).

Věta 1.2. *Nechť (A_n) a (B_n) jsou reálné posloupnosti s vlastnostmi:*

1. *(B_n) je ostře rostoucí posloupnost kladných čísel;*
2. $\lim\limits_{n \to +\infty} B_n = +\infty$ *;*
3. *existuje* $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{A_n - A_{n-1}}{B_n - B_{n-1}}$, *označme ji* L.

Pak

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{A_n}{B_n} = L$$

Poznámka. Neexistence $\lim \frac{a_n}{b_n}$ nic neříká o limitě posloupnosti $\frac{\sum_{i=1}^n a_i}{\sum_{i=1}^n b_i}$.
Když např. definujeme posloupnosti $a_n = (-1)^n$ a $b_n = 1$, pak $\lim \frac{a_n}{b_n} = (-1)^n$ neexistuje. Protože $\sum_{i=1}^n (-1)^i \in \{-1, 0\}$, je

$$-\frac{1}{n} \ \leq \ \frac{\sum_{i=1}^n a_n}{\sum_{i=1}^n b_n} \ \leq \ 0 \ ,$$

a tedy $\lim \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{\sum_{i=1}^n b_i}$ existuje a je rovna 0.