Ke zkoušce z TČ, část přednášená Z. Masákovou:

OBLASTI ZE SKRIPT:

1. Trocha algebry: předpokládám, že umíte z Algebry
2. Něco o polynomech
3. Algebraická číselná tělesa
4. Racionální aproximace - bez Fareyových zlomků, bez vět 6.29 a 6.34
5. Okruh celých čísel - bez kapitoly 8.4
6. Dělitelnost a faktorizace

ÚLOHY:

1. Dokažte, že $\mathbb{R}[x]_{|(x^2+x+1)}$ je izomorfní tělesu $\mathbb{R}[x]_{|(x^2+1)}$ (tj. také $\mathbb{C}$). Dokažte, že polynomy v $\mathbb{R}[x]$ ireducibilní nad $\mathbb{R}$ jsou nanejvýš druhého stupně. Dokažte, že je-li f takový polynom, pak $\mathbb{R}[x]_{|f}$ je izomorfní $\mathbb{C}$.

2. Nechť $f \in \mathbb{Q}[x]$ je polynom s rac. koeficienty. Ukažte, že existuje polynom $g \in \mathbb{Q}[x]$, $g \neq 0$, tak, že $f(x)g(x) = a_2x^2 + a_3x^3 + a_5x^5 + \cdots + a_px^p$ je polynom, ve kterém jsou nenulové koeficienty pouze u mocnin s prvočíselným exponentem.

3. V tělese $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) = \{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\}$ najděte prvek inverzní k $(1 - \sqrt[3]{2})$.

4. S využitím lemmatu z přednášky popište všechna $\theta \in \mathbb{Q} \cap [0, \frac{1}{2}]$ taková, že $\sin^2(\pi\theta) \in \mathbb{Q}$.

5. Popište všechna $\theta \in \mathbb{Q} \cap [0, \frac{1}{2}]$ taková, že $\cos^2(\pi\theta) \in \mathbb{Q}$.

6. Dokažte, že $\sin(1^\circ)$ je algebraické iracionální.

7. Pro dané $\alpha \in \mathbb{R}$ dokažte, že $L = \mathbb{Q}(\sin\frac{\alpha}{3})$ je nadtěleso tělesa $K = \mathbb{Q}(\sin\alpha)$. Jaká je dimenze $[L : K]$ v závislosti na α?

8. Najděte sdružené kořeny k číslu $\cos\frac{2\pi}{5}$.

9. Jak vypadá minimální polynom čísla α^{-1}, když minimální polynom čísla α je $f(x) = x^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_ix^i$, $a_i \in \mathbb{Q}$?

10. Jak vypadá polynom, mezi jehož kořeny patří čísla α i α^{-1}, když minimální polynom čísla α je $f(x) = x^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_ix^i$, $a_i \in \mathbb{Q}$?

11. Najděte kubický polynom v $\mathbb{Z}[x]$, jehož kořenem je $\alpha = \zeta + \zeta^{-1}$, kde $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{7}}$.

12. Najděte algebraická čísla β, γ tak, aby
$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i) = \mathbb{Q}(\beta)\,, \quad \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3}, \sqrt{2} - \sqrt{5}) = \mathbb{Q}(\gamma)\,.$$

13. Upevněme m, M. Je pravda, že algebraických celých čísel stupně $< m$ takových, že $|\alpha| < M$ je konečně mnoho? Dokažte, nebo vyvraťte protipříkladem.

14. Nechť α je prvek algebraického číselného tělesa K. Je pravda, že α je algebraická jednotka, právě když $N(\alpha) = \pm 1$, kde N je norma v tělese K? Dokažte, nebo vyvraťte protipříkladem.

15. Dokažte, že $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ je iracionální číslo.

16. Nechť $P(z)$ je polynom stupně $< k$ s komplexními koeficienty. Nechť $\omega_1, \ldots \omega_k$ jsou k-té kořeny z jedničky. Dokažte, že
$$\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} P(\omega_i) = P(0).$$

17. Nechť $f(x) = x^5 - 8x^3 + 9x - 3$, $g(x) = x^4 - 5x^2 - 6x + 3$. Dokažte, že existuje $d \in \mathbb{Z}$ tak, že polynomy f, g mají společný kořen v $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$.

18. Nechť ζ je primitivní osmý kořen z jedničky. Ukažte, že $\mathbb{Q}(\zeta)$ obsahuje právě 3 podtělesa stupně 2 nad $\mathbb{Q}$, a to $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{-2})$.

19. Nechť K je těleso konečného stupně nad $\mathbb{Q}$. Dokažte, že K obsahuje pouze konečně mnoho kořenů z jedničky.

20. Dokažte, že polynom $x^4 + x + 1$ je ireducibilní nad $\mathbb{Q}$.

21. Dokažte, že polynom $x^4 + x^3 + x^2 + 6x + 1$ je ireducibilní nad $\mathbb{Q}$.

22. Ukažte, že řetězové zlomky $\alpha = [a_0, a_1, a_2, \cdots]$, $\beta = [b_0, b_1, b_2, \cdots]$ čísel $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ jsou od jistého členu shodné, právě když
$$\alpha = \frac{c\beta + d}{e\beta + f}, \qquad \text{kde } \det\left(\begin{smallmatrix} c & d \\ e & f \end{smallmatrix}\right) = \pm 1 .$$
(Od jistého členu shodné znamená, že existuje $l \in \mathbb{Z}$ a $k_0 \in \mathbb{N}_0$ tak, že $a_k = b_{k+l}$ pro všechna $k \geq k_0$.) Číslům α, β pak říkáme, že jsou ekvivalentní.

23. Markovova konstanta $\mu(\alpha)$ pro číslo $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ je rovna $\frac{1}{C}$, kde C je maximální takové, že
$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{Cq^2},$$
tj. $\mu(\alpha) = \liminf_{q \to \infty} q\|\alpha q\|$, kde $\|y\|$ označuje vzdálenost y k nejbližšímu celému číslu. Hurwitzova věta říká, že $\mu(\alpha) \leq \sqrt{5}^{-1}$ pro každé $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Dokažte, že $\mu(\alpha) = \sqrt{5}^{-1}$, právě když α je ekvivalentní zlatému řezu $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$.

24. Najděte C tak, aby Markovova konstanta každého čísla $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, které není ekvivalentní zlatému řezu splňovala $\mu(\alpha) \leq C$.

25. Nechť ζ je primitivní třetí kořen z jedničky. Najděte normu libovolného prvku $a + b\zeta$, $a, b \in \mathbb{Q}$ a určete okruh celých čísel v tělese $\mathbb{Q}(\zeta)$ a grupu jednotek v něm.

26. Nechť K je algebraické číselné těleso lichého stupně nad $\mathbb{Q}$. Dokažte, že v jediné kořeny jedničky, které leží v K jsou ± 1.

27. Najděte fundamentální jednotku v tělese $\mathbb{Q}(\sqrt{m^2 - 1})$, kde $m^2 - 1$ je čtvercuprosté.

28. Vypočtěte diskriminant souboru $1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3$ v tělese $\mathbb{Q}(\alpha)$, kde $\alpha = \sqrt[4]{2}$.