(1) **[B]** Nechť $A : \mathbb{R}^6 \mapsto \mathbb{R}^6$ je lineární zobrazební takové, že $A^{26} = I$. Najděte lineární prostory V_1, V_2 a V_3 takové, že
- $\mathbb{R}^6 = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$
- $\dim V_1 = \dim V_2 = \dim V_3$
- $AV_1 \subset V_1$, $AV_2 \subset V_2$ a $AV_3 \subset V_3$

(2) **[B]** Nechť G je konečná grupa tvořena celočíselnými maticemi roměru 2×2 s operací násobení.
- Co můžete říct o prvcích grupy G: $\det A$, vlastní čísla A, Jordanův tvar A, řád A ?
- Nalezněte všechny takové grupy až na izomorfizmus.

(3) **[D]** M je komplexní matice $n \times n$. Označme

$$G_M = \{\lambda : \lambda M \sim M\}$$

- Určete G_M pro matici $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- Když $M^k \neq 0$, pro každé $k \in \mathbb{N}$, pak G_M je konečná. Dokažte.

(4) M je matice rozměru 20×20 taková, že pro každé $i, j = 1, 2, \ldots, 20$ platí:

$$m_{ij} \in \{+1, -1\} \text{ pro } i \neq j \qquad \text{a} \qquad m_{ij} = 0 \text{ pro } i = j$$

Dokažte, že M je regulární.

(5) **[B]** Dokažte, že když A je matice rozměru 2×2 s celočíselnými prvky taková, že $A^n = I$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$, pak $A^{12} = I$.

(6) **[I]** Nechť $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$.
- Dokažte, že

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} A + B & 0 \\ 0 & A - B \end{pmatrix}$$

- Odvoďte, že

$$\text{hodnost}(A + B) \leq \text{hodnost}(A) + \text{hodnost}(B)$$

Návod: Použijte elementární operace k převodu matice $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ na matici $\begin{pmatrix} A + B & B \\ B & B \end{pmatrix}$

(7) **[A]** Nechť $A, B, C, D \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Položme

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

Dokažte: Když $C = 0$, pak

$$\det M = \det(AD - CB)\,.$$

Ukažte, že obecně neplatí $\det M = \det(AD - CB)$.

(8) **[A]** Nechť $A, B, C, D \in \mathbb{C}^{n\times n}$ a nechť $AC = CA$. Dokažte, že

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - CB)\,.$$

Návod:

- Uvažujte nejdříve, že matice A je regulární a zkoumejte vztah mezi determinanty matic

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \begin{pmatrix} I & 0 \\ -C & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

- Pro singulární matici $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ dokažte, že existuje $\varepsilon > 0$ tak, že matice $A + tI$ je regulární pro každé $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

(9) **[G]** Nechť A a B jsou reálné matice takové, že $A^\top = A$, pro všechna $x \in \mathbb{R}^n$ platí $x^\top Ax \geq 0$ a současně $AB + BA = 0$. Dokažte, že $AB = BA = 0$ a dejte příklad takových matic, ve kterém $A \neq 0$ a $B \neq 0$.

(10) **[I]** Nechť $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ and $B \in \mathbb{C}^{n\times m}$. Dokažte, že

$$\begin{pmatrix} AB & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B & BA \end{pmatrix}$$

a z toho odvoďte, že matice AB a BA mají stejná nenulová vlastní čísla (včetně jejich algebraických násobností). Když $m = n$, pak A a B mají stejná vlastní čísla.

(11) Nechť $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Dokažte, že

$$\sigma(A) = \sigma(B) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \operatorname{tr} A^k = \operatorname{tr} B^k \;\; \text{pro každé} \;\; k = 1, 2, \ldots, n\,.$$

$\sigma(A)$ je spektrum uvažované včetně algebraických násobností a $\operatorname{tr} A$ je stopa matice A.

(12) Nechť A a B jsou komplexní čtvercové matice. Dokažte nebo vyvraťte:

- Když A a B jsou diagonalizovatelné, pak $A + B$ je diagonalizovatelná;
- Když A a B jsou diagonalizovatelné, pak AB je diagonalizovatelná;
- Když A^2 je diagonalizovatelná, pak A je diagonalizovatelná;
- Když A^2 je diagonalizovatelná a A je invertovatelná, pak A je diagonalizovatelná.

(13) **[E]** Caleyova věta říká, že matice A je kořenem svého charakteristického polynomu $p_A(t)$. Polynomů, které mají za kořen A, je hodně. Nenulový polynom minimálního stupně, který má za kořen matici A se nazývá minimální polynom matice A, označme jej $\mu_A(t)$.

Určete Jordanův tvar matice A pokud víte, že

$$p_A(t) = \mu_A(t)(t - i) \quad \text{a} \quad \Big(\mu_A(t)\Big)^2 = p_A(t)(t^2 + 1)$$

(14) Nechť platí $A \otimes B = C \otimes D \neq 0$ a nechť matice A a C mají stejný rozměr. Pak $A = aC$ a $B = bD$, kde $ab = 1$.

(15) **[E]** Napište co nejdelší seznam matic s vlastnostmi:

- charakteristický polynom každé matice je $(t-1)^5(t+1)$
- minimální polynom (viz předchozí příklad) každé matice je $(t-1)^2(t+1)$
- žádné dvě matice ze seznamu nejsou podobné jedná druhé

(16) **[F]** Nechť A a B jsou regulární matice z $\mathbb{C}^{5\times 5}$ takové, že existuje $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 1$ vyhovující

$$AB = \alpha BA\,.$$

Dokažte, že existuje regulární matice $R \in \mathbb{C}^{5\times 5}$ a čísla $a, b \in \mathbb{C}$ takové, že

$$R^{-1}AR = a\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad R^{-1}BR = b\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \omega^4 \end{pmatrix},$$

kde $\omega = \exp(i\frac{2\pi}{5})$.

(17) **[G]** Rozhodněte, zda platí následující tvrzení.
- Nechť $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Pokud $x^*Ax \geq 0$ pro každé $x \in \mathbb{C}^n$. Pak $A = A^*$, tj. A je hermitovaská.
- Nechť $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Pokud $x^\top Ax \geq 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}^n$. Pak $A = A^\top$, tj. A je symetrická.

(18) **[I]** Nechť $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mají vlastnost, že $A^2 = A$ a $B^2 = B$ a navíc obě matice mají stejnou hodnost. Pak $A \sim_{\mathbb{C}} B$.

(19) **[H]** Nalezněte charakteristický polynom a Jordanův tvar matice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ s prvky

$A_{ij} = 1$, když $i = j$ nebo $i = 1$ nebo $j = 1$,
$A_{ij} = 0$, v ostatních příadech.

Např. pro $n = 5$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(20) **[G]** Nechť A a B jsou čtvercové pozitivně semidefinitní matice. Pak existuje regulární matice P taková, že

$$P^*AP \quad \text{a} \quad P^*BP$$

jsou diagonální.

(21) **[H]** Nechť $J_k(\lambda) \in \mathbb{C}^{k\times k}$ je Jordanova buňka rozměru k k číslu λ. Určete Jordanův tvar transponované matice $J_k(\lambda)^\top$.

(22) **[J]** Je pravda, že $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ komutuje s $A^\top$?

(23) Nechť $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Ukažte, že každá matice B, která komutuje s A, má tvar $B = sI + tA$ pro nějaké $s, t \in \mathbb{R}$.

(24) **[D]** Nechť
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Pro které kladné $n \in \mathbb{N}$ existuje komplexní matice $B \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ taková, že $B^n = A$?

(25) Ukažte, že
- existuje reálná matice $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ taková, že $A^2 = -I$
- neexistuje matice $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, která by splňovala
$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1-\varepsilon \end{pmatrix}, \qquad \text{kde } \varepsilon > 0.$$

(26) **[B]** Nechť V je množina matic rozměru 5×7 s vlastností, že pro každou $A, B \in V$ a $r, s \in \mathbb{R}$ platí, že $sA + tB \in V$. Dokažte, nebo vyvraťte: Když V obsahuje matice hodností $0, 1, 2, 4$ a 5, pak obsahuje i matici s hodnosti 3.

(27) Nechť $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$. Najděte kladné $m, n, k \in \mathbb{N}$ takové, že $A^m B^n = 2^{8-k} I$.

(28) Nechť A, B jsou čtvercové matice stejného rozměru takové, že $ABAB = 0$. Plyne z toho, že $BABA = 0$?

(29) **[J]** Dokažte, že když čtvercová matice $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ je podobná pouze sama sobě, pak A je násobek identické matice.

(30) **[F]** Nechť A a B jsou diagonalizovatelné regulární matice z $\mathbb{C}^{4\times 4}$ takové vyhovující
$$AB = -BA\,.$$
Dokažte, že existují regulární matice $R \in \mathbb{C}^{n\times n}$ a $\tilde{A}, \tilde{B} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$, takové, že
$$R^{-1}AR = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \otimes \tilde{A} \qquad \text{a} \qquad R^{-1}BR = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \tilde{B}\,.$$
Návod: Dosaďte vlastní vektor matice A do rovnosti $AB = -BA$, odvoďte symetrii spektra kolem počátku a vztah vlastního vektoru k λ a vlastního vektoru k opačnému vlastnímu císlu.

(31) **[C]** Nechť A je Hermitovská matice taková že
$$A^5 + A^3 + A = I\,.$$
Dokažte, že $A = I$

(32) **[C]** Dokažte, nebo vyvraťte: matice A rozměru $n \times n$ taková, že $A^2 + 2A + 5I = 0$ existuje právě tehdy, když n je sudé.

(33) **[H]** Nechť $J_k(\lambda) \in \mathbb{C}^{k\times k}$ je Jordanova buňka rozměru k k číslu λ. Určete Jordanův tvar matice $J_k(\lambda) \otimes J_\ell(\mu)$.