Kvantová mechanika – cvičení

Ladislav Hlavatý

September 29, 2003

Cvičení 1 *Napište rozdělovací funkci Gaussova pravděpodobnostního rozdělení. Interpretujte význam jejích parametrů. Vypočítejte jeho momenty. Napište vzorec pro*

$$I(n,a,b) := \int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-ax^2+bx} dx,\ \ n \in \mathbf{Z},\ \ a,b \in \mathbf{C},\ \ Re\ a > 0.$$

(Zapamatujte si jej pro n=0,1,2!)

Cvičení 2 *Jaká je hustota pravděpodobnosti nalezení klasického jednorozměrného oscilátoru s energií E v intervalu $(x, x+dx)$? Co potřebujeme znát, chceme-li tento pravděpodobnostní výrok změnit v deterministickou předpověď?*

Cvičení 3 *Popište jednorozměrný harmonický oscilátor Hamiltonovskou formulací klasické mechaniky. Napište a vyřešte pohybové rovnice. Napište rovnici pro fázové trajektorie. Hodnotou jaké fyzikální veličiny jsou určeny?*

Cvičení 4 *Spočtěte charakteristickou dobu života elektronu v atomu vodíku pokud jej považujeme za klasickou částici pohybující se po kruhové dráze o (Bohrově) poloměru $a \approx 10^{-10}$ m. (viz skripta Štoll, Tolar* Teoretická fyzika*, příklad 9.52)*

Cvičení 5 *Nechť statistická rozdělovací funkce stavů klasického mechanického oscilátoru je dána Gibbsovou formulí*

$$P = a\ e^{-\frac{E}{kT}}.$$

Spočtěte střední hodnotu energie.

Cvičení 6 *Jakou vlnovou délku má elektromagnetické záření, jehož zdrojem je elektron – pozitronová anihilace*

$$e^+ + e^- \to \gamma + \gamma$$

v klidu?

Cvičení 7 *Určete vlnovou délku a frekvenci de Broglieovy vlny pro molekulu kyslíku ve vzduchu vašeho pokoje a pro částici o hmotnosti 10 μg pohybující se rychlostí zvuku.*

Cvičení 8 *Podle de Broglieovy hypotézy určete ohyb způsobený průletem tenisového míčku ($m = 0.1$ kg) rychlostí 0,5 m/s obdélníkovitým otvorem ve zdi o rozměrech* 1×1.5 *m.*

Cvičení 9 *Na jakou rychlost je třeba urychlit elektrony aby bylo možno pozorovat jejich difrakci na krystalové mříži s charakteristickou vzdáleností atomů 0.1 nm?*

Cvičení 10 *Nechť $V(\vec{x}) = 0$ (volná částice). Pomocí Fourierovy transformace určete řešení Schrödingerovy rovnice, které v čase t_0 má tvar*

$$\psi(\vec{x}, t_0) = g(\vec{x}) = C \exp[-Ax^2 + \vec{B}\vec{x}] \tag{1}$$

kde Re $A > 0,\ \vec{B} \in \mathbf{C}^3,\ C \in \mathbf{C}.$

Cvičení 11 *Nechť $\psi(x, y, z, t)$ je řešením Schrödingerovy rovnice pro volnou částici. Ukažte, že*

$$\tilde{\psi}(x, y, z, t) := \exp[-i\frac{Mg}{\hbar}(zt + gt^3/6)]\, \psi(x, y, z + gt^2/2, t)$$

je řešením Schrödingerovy rovnice pro částici v homogenním poli se zrychlením g.

Cvičení 12 *Čemu je úměrná pravděpodobnost nalezení částice popsané de Broglieovou vlnou*

$$\psi_{\vec{p},E}(\vec{x}, t) = Ae^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\vec{x} - Et)}, \tag{2}$$

v oblasti $(x_1, x_2) \times (y_1, y_2) \times (z_1, z_2)$?

Cvičení 13 *Čemu je úměrná hustota pravděpodobnosti pro řešení*

$$\psi(\vec{x}, t) = C\chi(t)^{-3/2} e^{\frac{\vec{B}^2}{4A}} e^{-A\frac{[\vec{x} - \vec{B}/(2A)]^2}{\chi(t)}} \tag{3}$$

$$\chi(t) = 1 + \frac{2iA\hbar}{m}(t - t_0)$$

z příkladu 10 pro $A > 0$? Jak se mění poloha jejího maxima s časem? Čemu je rovna její střední kvadratická odchylka? Jak se mění s časem? Za jak dlouho se zdvojnásobí "šířka" vlnového balíku pro elektron lokalisovaný s přesností 1 cm a pro hmotný bod o hmotě 1 gram jehož těžiště je lokalisováno s přesností 10^{-6}m?

Cvičení 14 *Jaká je pravděpodobnost nalezení elektronu vodíkového obalu ve vzdálenosti* $(r, r+dr)$ *od jádra, je-li popsán (v čase* t_0*) funkcí*

$$g(x,y,z) = Ae^{-\sqrt{x^2+y^2+z^2}/a_0},$$

kde $a_0 = 0.53 \times 10^{-8}$ *cm je tzv. Bohrův poloměr?*

Cvičení 15 *Nalezněte vlastní hodnoty energie kvantové částice pohybující se v jednorozměrné konstantní "nekonečně hluboké potenciálové jámě" t.j. v potenciálu* $V(x) = 0$ *pro* $|x| < a$ *a* $V(x) = \infty$ *pro* $|x| > a$.
Návod: Předpokládejte, že vlnové funkce jsou všude spojité a nulové pro $|x| \geq a$.

Cvičení 16 *Nalezněte vlastní hodnoty energie kvantové částice pohybující se v jednorozměrné konstantní potenciálové jámě t.j. v potenciálu* $V(x) = -V_0 < 0$ *pro* $|x| < a$ *a* $V(x) = 0$ *pro* $|x| > a$.
Návod: Předpokládejte, že vlnové funkce jsou spojité a mají spojité derivace pro $x \in \mathbf{R}$.

Cvičení 17 *Najděte ortonormální basi v* $\mathbf{C}^2$*, jejíž prvky jsou vlastními vektory matice*

$$\sigma_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Cvičení 18 *Ukažte, že Hermitovy polynomy lze definovat též způsobem*

$$H_n(z) := (-)^n e^{z^2} (\frac{d}{dz})^n e^{-z^2} \tag{4}$$

Návod: Ukažte že pravá strana (4) splňuje rovnici

$$u" = 2zu' - 2nu \tag{5}$$

Cvičení 19 *Ukažte, že*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} \xi^n = \exp[x^2 - (x-\xi)^2]$$

Cvičení 20 *Použitím vytvořující funkce ze cvičení 19 ukažte, že*

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(x) H_m(x) e^{-x^2} dx = 2^n n! \pi^{1/2} \delta_{nm}.$$

Ukažte, že odtud plyne ortonormalita vlastních funkcí harmonického oscilátoru.

Cvičení 21 *Jaká je hustota pravděpodobnosti nalezení kvantového jednorozměrného oscilátoru s energií* $\hbar\omega(n+\frac{1}{2})$ *v bodě* x *? Spočítejte a nakreslete grafy této hustoty pro* $n = 0, 1, 2, \ldots$ *a srovnejte je s hustototu pravděpodobnosti výskytu klasického oscilátoru v daném místě.*

Cvičení 22 *Spočítejte komutátory*

$$[L_j, X_k],\ [L_j, P_k],\ [L_j, L_k], \tag{6}$$

kde

$$\hat{L}_j := \epsilon_{jkl}\hat{X}_k\hat{P}_l \tag{7}$$

Cvičení 23 *Ukažte, že vzájemně komutují operátory* $\frac{1}{2}\hat{P}^2/m + V(|\vec{x}|),\ \hat{L}_3 \equiv \hat{L}_z$ *a*

$$\hat{L}^2 := \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2, \tag{8}$$

Cvičení 24 *Jak vypadají operátory* $\hat{X}_j,\ \hat{P}_j,\ \hat{L}_j,\ j = 1, 2, 3 \equiv x, y, z$ *ve sférických souřadnicích?*

Cvičení 25 *"Kvantové tuhé těleso" (např. dvouatomová molekula) s momentem setrvačnosti* I_z *volně rotuje v rovině. Najděte její možné hodnoty energie.*

Cvičení 26 *S použitím vzorců pro jednotlivé složky momentu hybnosti ukažte, že operátor* $\hat{L}^2$ *má ve sférických souřadnicích tvar*

$$\hat{L}^2 = -\hbar^2[(\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta})] \tag{9}$$

Cvičení 27 *Odvoďte pravděpodobnosti nalezení částice v daném prostorovém úhlu pro stavy* s, p, d.

Cvičení 28 *Napište všechny vlnové funkce harmonického oscilátoru pro stavy s energiemi* $3/2\hbar\omega$, $5/2\hbar\omega$ *a* $7/2\hbar\omega$.

Cvičení 29 *Napište operátor* $\hat{L}^2$ *vyjádřený pomocí posunovacích operátorů* $\hat{L}_\pm$ *a* $\hat{L}_3$.

Cvičení 30 *Posunovací operátory momentu hybnosti působí na kulové funkce způsobem*

$$\hat{L}_\pm Y_{lm} = \alpha^\pm_{lm} Y_{l,m\pm1}, \tag{10}$$

Spočítejte koeficienty $\alpha^\pm_{lm}$

Cvičení 31 *Kreační a anihilační operátory působí na vlastní funkce operátoru energie harmonického oscilátoru způsobem*

$$\hat{a}_\pm\psi_n = \alpha^\pm_n\psi_{n\pm1} \tag{11}$$

Spočítejte koeficienty $\alpha^\pm_n$.

Cvičení 32 *Ukažte, že pro kreační a anihilační operátory energie harmonického oscilátoru platí*

$$\hat{a}_+\hat{a}_-\psi_n = n\ \psi_n$$

Cvičení 33 *Spočtěte střední hodnoty složek hybnosti kvantové částice v Coulombově poli s energií* $-\frac{MQ^2}{2\hbar^2}$ *a nulovým momentem hybnosti (elektron v atomu vodíku ve stavu 1s).*

Cvičení 34 *Spočtěte střední hodnoty složek polohy kvantové částice popsané vlnovou funkcí (1).*

Cvičení 35 *Spočtěte střední hodnoty složek hybnosti kvantové částice popsané vlnovou funkcí (1). Napište tvar vlnové funkce (1) popisující vlnový balík se střední hodnotou hybnosti* $\vec{p}_0$*, který má v čase* t_0 *střední hodnotu polohy* $\vec{x}_0$*.*

Cvičení 36 *Určete pravděpodobnost nalezení hybnosti částice popsané vlnovou funkcí*

$$\psi(x) = Ce^{-\vec{x}^2+ix_1} \tag{12}$$

v intervalu $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times (a_3, b_3)$*. Určete hustotu pravděpodobnosti nalezení hybnosti v okolí hodnoty* $\vec{p}_0$*.*

Cvičení 37 *Nechť "jednorozměrná" částice s hmotou* M *v potenciálu harmonického oscilátoru s vlastní frekvencí* $\omega = \hbar/M$ *je ve stavu popsaném vlnovou funkcí*

$$\psi(x) = Ce^{-x^2+ix} \tag{13}$$

S jakou pravděpodobností naměříme hodnoty její energie rovné $\frac{1}{2}\hbar\omega$ *resp.* $\hbar\omega$, $\frac{3}{2}\hbar\omega$*?*

Cvičení 38 *Nechť částice s hmotou* M *v potenciálu harmonického oscilátoru s vlastní frekvencí* $\omega = \hbar/M$ *je ve stavu popsaném vlnovou funkcí*

$$\psi(x) = Ce^{-\vec{x}^2+ix_1} \tag{14}$$

S jakou pravděpodobností naměříme hodnoty její energie rovné $\frac{5}{2}\hbar\omega$*?*

Cvičení 39 *Nechť částice je ve stavu popsaném vlnovou funkcí*

$$\psi = (4\pi)^{-1/2}(e^{i\phi}\sin\theta + \cos\theta)g(r) \tag{15}$$

Jaké hodnoty L_z *můžeme naměřit a s jakou pravděpodobností? Jaká je střední hodnota* L_z *v tomto stavu?*

Cvičení 40 *Nechť částice je popsána vlnovou funkcí*

$$\psi = (x + y + 2z)\exp(-\alpha\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}),$$

Jaká je pravděpodobnost nalezení částice v prostorovém úhlu $(\theta, \theta + d\theta) \times (\phi, \phi + d\phi)$*, kde* θ, ϕ *jsou polární, respektive azimutální úhel? Jaké hodnoty kvadrátu momentu hybnosti můžeme naměřit? Jaká je střední hodnota z-ové složky momentu hybnosti? Jaká je pravděpodobnost naměření z-ové složky momentu hybnosti* $L_z = +\hbar$*? Návod: zapište* ψ *pomocí kulových funkcí.*

Cvičení 41 *Spočtěte střední kvadratické odchylky složek polohy a hybnosti kvantové částice při měření na stavu popsaném vlnovou funkcí (1), kde* $A > 0$*. Ukažte, že pro tento stav platí*

$$\Delta_\psi(X_{\underline{k}})\Delta_\psi(P_{\underline{k}}) = \hbar/2 \tag{16}$$

Cvičení 42 *Ukažte, že v jednorozměrném případě podmínka*

$$[\hat{A} - < \hat{A} >_\psi - i\alpha(\hat{B} - < \hat{B} >_\psi)]\psi = 0 \tag{17}$$

pro operátory $\hat{A} = \hat{X}, \hat{B} = \hat{P}$ *je integrodiferenciální rovnicí, jejímiž jedinými řešeními jsou funkce*

$$g(x) = C\exp[-Ax^2 + Bx],$$

které jsme nazvali minimální vlnové balíky.

Cvičení 43 *Nechť Hamiltonián kvantového systému má čistě bodové spektrum. Na systému byla naměřena hodnota a pozorovatelné A, která má čistě bodové spektrum a a je nedegenerovaná vlastní hodnota. Jaká je pravděpodobnost, že naměříme stejnou hodnotu, budeme-li měření opakovat po čase t?*

Cvičení 44 *Nechť částice hmoty* M *v jednorozměrné nekonečně hluboké potenciálové jámě šířky* $2a$ *je v čase* $t = 0$ *popsána vlnovou funkcí, (která je superposicí stacionárních stavů)*

$$\psi(x, 0) = 0, \text{ pro } |x| > a, \quad \psi(x, 0) = sin[\frac{\pi}{2a}(x - a)] + sin[\frac{\pi}{a}(x - a)], \text{ pro } |x| < a.$$

Jaká je pravděpodobnost, že částice se v čase $t = 0$ *a* $t = \frac{8Ma^2}{\pi\hbar}$ *bude nacházet v intervalu (-a,0)?*

Cvičení 45 *Nechť jednorozměrná částice v poli harmonického oscilátoru je v čase* $t = 0$ *ve stavu*

$$\psi(x, 0) = A\psi_0 + B\psi_1$$

kde $A, B \in \mathbf{R}$*,* ψ_n *vlastní stavy energie normalizované k 1. V jakém stavu je v libovolném čase* $t > 0$*?*

Cvičení 46 *Ukažte jak závisí na čase střední kvadratická odchylka souřadnice jednorozměrného harmonického oscilátoru.*

Cvičení 47 *Nalezněte operátor rychlosti pro částici v elektromagnetickém poli.*

Cvičení 48 *Ukažte, že vlastní čísla operátoru $\hat{\vec{\mu}} \cdot \vec{B}$ jsou $\pm\mu_0|\vec{B}|$. Najděte vlastní funkce.*

Cvičení 49 *Ukažte že $\hat{\vec{S}}^2 = \frac{3}{4}\hbar^2\mathbf{1}$. Porovnejte tento výsledek s $\hat{\vec{L}}^2$.*

Cvičení 50 *Nechť pro volnou částici se spinem je naměřena hodnota z–ové složky spinu s_z=$\hbar/2$. Jestliže vzápětí měříme hodnotu spinu ve směru, který se z–ovou osou svírá úhel Θ, jaké můžeme naměřit hodnoty a s jakou pravděpodobností?*

Cvičení 51 *Uvažujte systém (tzv. supersymetrický harmonický oscilátor) popsaný na Hilbertovu prostoru $L^2(\mathcal{R}, dx) \otimes \mathcal{C}^2$ hamiltoniánem*

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta \otimes \mathbf{1} + \frac{m\omega^2}{2}x^2 \otimes \mathbf{1} + \frac{\hbar\omega}{2}\mathbf{1} \otimes \sigma_3.$$

Dále je dán operátor

$$\hat{Q} = \frac{1}{2\sqrt{m}}\sigma_1(\hat{P} + i\omega m\sigma_3\hat{X}).$$

Nalezněte $\hat{Q}^\dagger$, $\hat{Q}^2$, $[\hat{H}, \hat{Q}]$ a výsledky vyjádřete pomocí operátorů $\hat{H}$, $\hat{Q}$. Jaké omezení lze vyvodit z těchto relací na spektrum hamiltoniánu (tj. zda je shora či zdola omezené a čím)? (Postačí uvažovat bodovou část spektra.)

Cvičení 52 *Částice se spinem $\hbar/2$ je umístěna v konstantním magnetickém poli směřujícímím ve směru osy x. V čase $t = 0$ byla naměřena hodnota její z-ové složky spinu $+\hbar/2$. S jakou pravděpodobností nalezneme v libovolném dalším čase hodnotu její y-ové složky spinu $+\hbar/2$?*

Cvičení 53 *Ukažte, že pokud výraz $\exp[i\vec{a} \cdot \vec{\sigma}]$ definujeme pomocí řady*

$$\exp[i\vec{a} \cdot \vec{\sigma}] := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\vec{a} \cdot \vec{\sigma})^n}{n!}, \tag{18}$$

pak platí

$$\exp[i\vec{a} \cdot \vec{\sigma}] = \cos(|\vec{a}|) + i\frac{\vec{a} \cdot \vec{\sigma}}{|\vec{a}|}\sin(|\vec{a}|) \tag{19}$$

Cvičení 54 *Napište vlnovou funkci $\psi(\vec{x}, \xi)$ základního stavu částice v poli Coulombova potenciálu s hodnotou z–ové, resp. x–ové, resp. y–ové složky spinu rovné $\hbar/2$.*

Cvičení 55 *Najděte energie a vlastní funkce základního a prvního excitovaného stavu dvou nerozlišitelných částic se spinem 0, respektive* $\frac{1}{2}$ *v poli harmonického oscilátoru.*

Cvičení 56 *Atom uhlíku má čtyři valenční elektrony (přesvědčte se). Můžeme na něj tedy nahlížet jako na systém čtyř elektronů ve sféricky symetrickém poli. Jaká je pak degenerace jeho základního stavu?*

Cvičení 57 *Najděte v 1. řádu poruchové teorie energii základního stavu atomu helia.*