O elektrodynamice pohybujících se těles

A. Einstein

Bern, červen 1905

Je známo, že Maxwellova elektrodynamika vede při své aplikaci na pohybující se tělesa (jako teorie popisující v současnosti tyto jevy) k asymetriím, které se tyto jevy nezdají vykazovat. Uvažme například vzájemné elektrodynamické působení mezi magnetem a vodičem. Pozorované jevy zde závisí pouze na relativním pohybu vodiče a magnetu, zatímco podle obvyklého popisu jsou případy, kdy se pohybuje první nebo druhé těleso, velmi rozdílné. Konkrétně, nechť se pohybuje magnet a vodič stojí, takže v okolí magnetu vzniká elektrické pole o známé hodnotě energie, které v místech, kterými prochází vodič, budí proud. Pokud ale magnet stojí a pohybuje se vodič, nevzniká v okolí magnetu žádné elektrické pole, naproti tomu ve vodiči elektromotorická síla, které neodpovídá žádná energie, budí elektrický proud stejné velikosti a průběhu ze stejné příčiny, jako v prvním případě elektrická síla (předpokládáme rovnost relativního pohybu v obou v úvahu braných případech).

Příklady podobného druhu, stejně jako nezdařené experimenty usilující o určení pohybu Země vůči „světelnému médiu (étéru)“, vedou k domněnce, že pojem absolutního klidu nevypovídá nejen v mechanice, ale též v elektrodynamice o žádné vlastnosti jevů, nýbrž že spíše ve všech souřadných systémech, v nichž platí pohybové rovnice mechaniky, platí též pohybové rovnice elektrodynamiky a optiky, které se již osvědčily při výpočtech do prvního řádu. Hodláme tuto domněnku (jejíž obsah bude nadále nazýván „princip relativity“) povýšit na předpoklad a mimoto zavedeme zdánlivě nestravitelný předpoklad, že světlo se vždy šíří v prázdném prostoru s určitou, na pohybu tělesa jej vyzařujícího nezávislou rychlostí V. Tyto dva předpoklady umožňují dospět k jednoduché a nerozporné elektrodynamice pohybujících se těles vycházející ze základu Maxwellovy teorie pro tělesa v klidu. Zavedení „světelného étéru“ se proto ukazuje být nadbytečným, jelikož v rozvíjeném pojetí se ani nezavádí „absolutně stojící prostor“ vybavený zvláštními vlastnostmi, ani není bodu v prázdném prostoru, v němž probíhají elektromagnetické procesy, přiřazen vektor rychlosti.

Rozvíjená teorie se opírá - jako každá jiná elektrodynamika - o kinematiku tuhých těles, jelikož výroky každé elektrodynamické teorie popisují vztahy mezi tuhými tělesy (souřadnými systémy), hodinami a elektromagnetickými procesy. Nedostatečný ohled na tuto okolnost je kořenem potíží, se kterými bojovala současná elektrodynamika pohybujících se těles.

1 Kinematická část

1.1 Definice současnosti

Nechť existuje souřadný systém, v němž platí Newtonovy pohybové rovnice mechaniky. Abychom jej slovně odlišili od dále zavedených souřadných systémů a upřesnili jeho představu, nazveme tento souřadný systém „stojící systém“.

Jestliže se pohybuje hmotný bod vzhledem k tomuto souřadnému systému, je možné určit jeho polohu vůči tomuto systému pomocí tuhých měřících tyčí s použitím metod euklidovské geometrie a vyjádřit ji v kartézských souřadnicích.

Chceme-li popsat *pohyb* hmotného bodu, zadáme hodnotu jeho souřadnic jako funkci času. Je dobře mít na paměti, že takový matematický popis má fyzikální smysl pouze tehdy, jestliže je přitom předem jasné, co se zde rozumí pod slovem „čas“. Musíme brát ohled na to, že všechny naše výroky, v nichž hraje úlohu čas, jsou vždy úsudky o současných událostech. Když například řeknu: „Ten vlak sem přijíždí v 7 hodin.“, tak to znamená něco jako: „Natočení malé ručičky mých hodinek na 7 hodin a příjezd vlaku jsou současné události.“[1]

Může se zdát, že všechny obtíže, s nimiž se střetáváme při definici „času“, je možné překonat, jestliže na místo „čas“ dosadím „poloha malé ručičky mých hodinek“. Taková definice postačuje v zatím zkoumaném případě, kdy chceme definovat čas výhradně pro místo, v němž se právě hodiny nacházejí; tato definice ale nestačí, jakmile popisujeme posloupnosti událostí v různých bodech a snažíme se je časově uspořádat anebo přiřadit čas událostem, které se dějí v místech vzdálených od hodin (což je vlastně totéž).

Můžeme se zajisté spokojit s tím, že události časově uspořádáme tak, že pozorovatel s hodinami nacházející se v počátku souřadnic přiřadí odpovídající polohu hodinových ručiček světelným znamením docházejícím k němu prázdným prostorem od uvažovaných událostí. Jak víme ze zkušenosti, takové přiřazení s sebou ale nese nepříjemnou závislost na poloze pozorovatele

[1]Nebude zde brána na zřetel nepřesnost, která spočívá v pojmu současnosti dvou událostí v blízkých bodech a která musí být překonána abstrakcí.

vybaveného hodinami. K daleko praktičtějšímu stanovení dospějeme následující úvahou.

Nechť se v bodě A prostoru nacházejí hodiny, takže pozorovatel nacházející se v A může přiřadit čas událostem v bezprostředním okolí A určením poloh hodinových ručiček současných s těmito událostmi. Nechť se v bodě B prostoru nacházejí další hodiny - požadujeme, aby to byly „hodiny shodných vlastností jako ony nacházející se v bodě A“- takže je možné přiřazení času událostem v bezprostředním okolí B pomocí pozorovatele nacházejícího se v B. Není ale možné bez dalšího určení časově porovnávat události v A s událostmi v B; zatím jsme definovali pouze „čas v A“ a „čas v B“, ale žádný „čas“ společný pro A a B. Tento čas je možné určit pouze tím, že se definicí stanoví, že „čas“, který potřebuje světlo, aby dospělo z A do B, je roven „času“, který potřebuje, aby dospělo z B do A. Nechť je totiž vyslán světelný paprsek v „čase v A“ t_A z A směrem k B, odkud je v „čase v B“ t_B odražen zpět k A a dospěje v „čase v A“ $t_A^{'}$ zpět do A. Protože oboje hodiny jdou podle definice shodně, musí platit

$$t_B - t_A = t_A^{'} - t_B. \tag{1}$$

Budeme předpokládat, že tato definice synchronizace je bezrozporná, a také že pro libovolně mnoho bodů platí obecně následující vztahy:

1. Když jsou hodiny v B synchronizovány s hodinami v A, jsou také hodiny v A synchronizovány s hodinami v B.

2. Když jsou hodiny v A synchronizovány jak s hodinami v B, tak s hodinami v C, pak jdou také hodiny v B a v C navzájem synchronně.

Určili jsme tak pomocí myšleného (myšlenkového) fyzikálního pokusu, jak sestavit definici „současnosti“ a „času“ pro shodně jdoucí, v různých bodech nacházející se hodiny v klidu a porozumět jí. „Čas“ nějaké události je s touto událostí současným údajem hodin, které se nacházejí na místě této události, jsou v klidu a jsou synchronizované s určenými hodinami v klidu.

Ještě určíme shodně se zkušeností, že veličina

$$\frac{2\overline{A\,B}}{t_A^{'} - t_A} = V \tag{2}$$

je univerzální konstantou (rychlostí světla v prázdném prostoru).

Je podstatné, že jsme čas definovali pomocí nepohybujících se hodin v klidovém systému; kvůli této skutečnosti nazveme právě nadefinovaný čas „časem stojícího systému“.

1.2 O relativitě délek a časů

Následující úvahy se opírají o „Princip relativity“ a „Princip stálé rychlosti světla“. Tyto principy definujeme následovně:

1. Zákony, podle nichž se mění stavy fyzikálních systémů, nezávisí na tom, ve kterém ze dvou souřadných systémů pohybujících se navzájem rovnoměrně přímočaře tyto změny stavů popisujeme.

2. Každý světelný paprsek se pohybuje ve „stojícím“ souřadném systému s určitou rychlostí V, nezávislou na tom, zda tento paprsek byl vyslán pohybujícím se či stojícím tělesem. Přitom

$$\text{rychlost} = \frac{\text{dráha světla}}{\text{doba pohybu}}, \tag{3}$$

kde „doba pohybu“ je pojímána ve smyslu definice z kapitoly 1.1.

Nechť je dána stojící tuhá tyč, jejíž délka měřená měřící tyčí taktéž v klidu je rovna l. Předpokládáme, že osa tyče je položena ve směru osy X stojícího souřadného systému a že potom tyč uvedeme do rovnoměrného přímočarého pohybu (o rychlosti v) ve směru osy X ve smyslu vzrůstajícího x. Nyní se ptáme na délku pohybující se tyče, kterou zamýšlíme zjistit následujícími dvěma způsoby:

a) Pozorovatel se pohybuje i s dříve zmíněnou měřící tyčí současně s měřenou tyčí a měří přímo přiložením měřící tyče délku měřené tyče, stejně, jako když se měřená tyč, pozorovatel a měřící tyč se nacházejí v klidu.

b) Pozorovatel určí pomocí nepohybujících se hodin rozmístěných ve stojícím systému (synchronizovaných podle kap. 1.1), v jakých bodech klidového systému se začátek a konec měřené tyče nacházejí v určený čas t. Vzdálenost těchto bodů změřená s již použitou, v tomto případě se nepohybující měřící tyčí je rovněž délkou, kterou lze označit jako „délku tyče“.

Podle principu relativity musí být délka nalezená postupem a), kterou hodláme nazvat „délka tyče v pohybujícím se systému“, rovna délce l stojící tyče.

Délku nalezenou postupem b), kterou nazveme „délkou (pohybující se) tyče ve stojícím systému“, určíme na základě našich dvou principů a nalezneme, že je odlišná od délky l.

Všeobecně užívaná kinematika mlčky předpokládá, že obě délky si jsou navzájem přesně rovny, čili jinými slovy, že pohybující se tuhé těleso je v časový okamžik t co do geometrické podoby plně nahraditelné tímtéž tělesem stojícím v daném místě.

Nechť jsou na obou koncích tyče (A a B) umístěny hodiny, které jsou synchronizovány s hodinami stojícího systému, tj. jejich údaje se v daný okamžik shodují s „časem stojícího systému“ na místech, na nichž se právě nacházejí; tyto hodiny jsou tedy „synchronizovány v stojícím systému“

Nechť se dále u každých hodin nachází s nimi se pohybující pozorovatel a nechť tito pozorovatelé použijí u obou těchto hodin kritérium synchronizovanosti chodu sestavené v kap. 1.1. V čase[2]) t_A vyjde světelný paprsek z A, v čase t_B je odražen v B a dorazí v čase t'_A zpět do A. S ohledem na princip stálé rychlosti světla nalézáme:

$$t_B - t_A = \frac{r_{AB}}{V - v} \tag{4}$$

a

$$t'_A - t_B = \frac{r_{AB}}{V + v}, \tag{5}$$

kde r_{AB} je délka pohybující se tyče měřená ve stojícím systému. Pozorovatel pohybující se s tyčí tedy nebude hodiny považovat za synchronně jdoucí, zatímco pozorovatel nacházející se v klidovém systému je za synchronně jdoucí prohlásí.

Vidíme tedy, že pojmu současnosti nesmíme přisuzovat žádný absolutní význam, nýbrž že dvě události, které jsou při pozorování z jednoho souřadného systému současné, nejsou vnímány jako současné události v jiném, vzhledem k onomu systému se pohybujícím systému.

1.3 Teorie transformací souřadnic a času z klidového systému do systému pohybujícímu se vzhledem k němu rovnoměrně přímočaře

Nechť jsou ve „stojícím“ prostoru zadány dva souřadné systémy, tj. systémy složené z třech navzájem kolmých tuhých hmotných přímek vycházejících z jednoho bodu. Požadujeme, aby x-ové osy obou systémů splývaly a jejich y-ové a z-ové osy byly navzájem rovnoběžné. Nechť je ke každém systému připojena měřící tyč a sada hodin a nechť jsou obě měřící tyče stejně jako všechny hodiny navzájem přesně stejné.

Nechť je nyní počátku jednoho z obou systémů (k) udělena (konstantní) rychlost v ve směru rostoucího x druhého, stojícího systému (K). Tuto rychlost je možné určit pomocí příslušných měřících tyčí a hodin. Každý čas t

[2] „Čas“ zde znamená „čas klidového systému“ a současně „polohu ručiček pohybujících se hodin, které se nacházejí v místě, o němž je řeč“.

stojícího systému K odpovídá určité poloze os pohybujícího se systému a z důvodů symetrie jsme oprávněni se domnívat, že pohyb k je možné popsat tak, že osy pohybujícího se systému v čase t („t“ značí vždy čas ve stojícím systému) jsou rovnoběžné s osami stojícího systému.

Představme si, že nyní měříme prostor jak ze stojícího systému K pomocí měřící tyče v klidu, tak z pohybujícího se systému pomocí pohybující se měřící tyče a tak zjistíme souřadnice x, y, z, resp. ξ, η, ζ. Dále nechť v každém bodě stojícího systému je určen čas t ve stojícím systému pomocí hodin synchronizovaných ve stojícím systému pomocí světelných signálů způsobem uvedeným v kap. 1.1 a nacházejících se v příslušném bodě; taktéž je určen čas τ v pohybujícím se systému pro všechny body pohybujícího se systému (v něm jsou tyto body vůči hodinám v tomto systému v klidu) použitím metody (viz kap. 1.1) světelných signálů mezi body, v nichž se hodiny nacházejí.

Ke každé čtveřici veličin hodnot x, y, z, t, jež plně určuje místo a čas ve stojícím systému, přísluší čtveřice hodnot ξ, η, ζ, τ určující onu událost vzhledem k systému k a nyní je naší úlohou nalézt soustavu rovnic spojující tyto veličiny.

Předně je jasné, že rovnice musí být *lineární* z důvodu vlastností homogenity, které přikládáme prostoru a času.

Položme $x' = x - vt$, takže je jasné, že bodu stojícímu v systému k přísluší určité, na čase nezávislé hodnoty x', y, z. Určíme nejprve τ jako funkci x', y, z a t. K tomuto účelu vyjádříme v rovnicích, že τ není nic jiného než souhrn údajů hodin stojících v systému k, které byly synchronizovány podle pravidla uvedeného v kap. 1.1.

Nechť je z počátku systému k vyslán světelný paprsek v čase τ_0 podél osy X směrem k x' a odsud je v čase τ_1 odražen zpět do počátku souřadnic, kam dorazí v τ_2, takže pak musí platit

$$\frac{1}{2}(\tau_0 + \tau_2) = \tau_1, \tag{6}$$

neboli s použitím principu stálé rychlosti světla a připojením argumentů funkce τ

$$\frac{1}{2}\left(\tau(0,0,0,t) + \tau\left(0,0,0,\left\{t + \frac{x'}{V-v} + \frac{x'}{V+v}\right\}\right)\right) = \tau(x',0,0,t+\frac{x'}{V-v}). \tag{7}$$

Odsud plyne, jestliže zvolíme x' infinitesimálně malé

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{V-v} + \frac{1}{V+v}\right)\frac{\partial\tau}{\partial t} = \frac{\partial\tau}{\partial x'} + \frac{1}{V-v}\frac{\partial\tau}{\partial t}, \tag{8}$$

neboli

$$\frac{\partial\tau}{\partial x'} + \frac{v}{V^2 - v^2}\frac{\partial\tau}{\partial t} = 0. \tag{9}$$

Je vhodné poznamenat, že místo počátku souřadnic jsme mohli zvolit libovolný jiný bod jako zdroj světelného paprsku a proto platí právě obdržená rovnice pro všechny hodnoty x', y, z.

Jestliže si povšimneme, že světlo se podél os H a Z šíří vzhledem ke stojícímu systému rychlostí $\sqrt{V^2 - v^2}$, získáme obdobnou úvahou použitou na tyto osy

$$\frac{\partial \tau}{\partial y} = 0 \tag{10}$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial z} = 0. \tag{11}$$

Z těchto rovnic plyne, že τ je lineární funkcí

$$\tau = a(t - \frac{v}{V^2 - v^2} x'), \tag{12}$$

kde a je prozatím neurčená funkce $\varphi(v)$ a pro jednoduchost předpokládáme, že v počátku k je $\tau = 0$ pro $t = 0$.

S pomocí těchto výsledků je snadné zjistit veličiny ξ, η, ζ, jestliže rovnicemi vyjádříme, že světlo se pohybuje také v pohybujícím se systému rychlostí V (jak vyžaduje princip stálé rychlosti světla ve spojení s principem relativity). Pro světelný paprsek vyslaný v čase $\tau = 0$ ve směru rostoucího ξ platí

$$\xi = V\tau, \tag{13}$$

neboli

$$\xi = aV(t - \frac{v}{V^2 - v^2} x'). \tag{14}$$

Nyní se ale světelný paprsek pohybuje vzhledem k počátku systému k rychlostí $V - v$ měřenou ve stojícím systému, takže platí

$$\frac{x'}{V - v} = t. \tag{15}$$

Dosadíme tuto hodnotu t do rovnice pro ξ, takže dostáváme:

$$\xi = a\frac{V^2}{V^2 - v^2} x'. \tag{16}$$

Podobným způsobem najdeme pomocí úvahy o světelných paprscích pohybujících se podél obou zbývajících os:

$$\eta = V\tau = aV(t - \frac{v}{V^2 - v^2} x'), \tag{17}$$

kde

$$\frac{y}{\sqrt{V^2 - v^2}} = t,\ x' = 0, \tag{18}$$

takže

$$\eta = a\frac{V}{\sqrt{V^2 - v^2}}y \tag{19}$$

a

$$\zeta = a\frac{V}{\sqrt{V^2 - v^2}}z. \tag{20}$$

Dosadíme za x' jeho hodnotu, takže dostáváme:

$$\tau = \varphi(v)\beta(t - \frac{v}{V^2}x), \tag{21}$$

$$\xi = \varphi(v)\beta(x - vt), \tag{22}$$

$$\eta = \varphi(v)y, \tag{23}$$

$$\zeta = \varphi(v)z, \tag{24}$$

kde

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} \tag{25}$$

a φ je prozatím neurčenou funkcí v. Jestliže nepoložíme žádné požadavky na počátek pohybujícího se systému a na počátek času τ, musíme na pravou stranu těchto rovnic přidat aditivní konstanty.

Nyní bychom měli dokázat, že každý světelný paprsek se šíří rychlostí V měřenou v pohybujícím se systému, jestliže tomu tak je, jak se domníváme, ve stojícím systému, neboť jsme ještě nedokázali, že princip stálé rychlosti světla je slučitelný s principem relativity.

Nechť je v čase $t = \tau = 0$ vyslána z počátku souřadnic, který v tomto čase u obou systémů splývá, kulová vlna, která se v systému K šíří rychlostí V. Jestliže je (x, y, z) bodem, do něhož právě vlna dospěla, pak platí

$$x^2 + y^2 + z^2 = V^2 t^2. \tag{26}$$

Tato rovnice se transformuje pomocí našich transformačních rovnic a po jednoduchém výpočtu dostáváme:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = V^2 \tau^2. \tag{27}$$

Uvažovaná vlna je tedy také v pohybujícím se systému pozorována jako kulová vlna s rychlostí šíření V. Tímto je ukázáno, že oba naše základní principy jsou navzájem slučitelné.

V odvozených transformačních rovnicích vystupuje ještě neurčená funkce φ proměnné v, kterou nyní chceme určit.

K tomuto účelu zavedeme ještě třetí souřadný systém K', který se vzhledem k systému k pohybuje rovnoměrně přímočaře podél osy Ξ tak, že jeho počátek se pohybuje podél osy Ξ rychlostí $-v$. Nechť v čase $t=0$ všechny tři počátky souřadnic splývají a nechť pro $t=x=y=z=0$ je čas t' systému K' roven nule. Souřadnice měřené v systému K' označíme x', y', z' a dvojím použitím našich transformačních rovnic dostáváme

$$t' = \varphi(-v)\beta(-v)\{\tau + \tfrac{v}{V^2}\xi\} = \varphi(v)\varphi(-v)t, \tag{28}$$

$$x' = \varphi(-v)\beta(-v)\{\xi + v\tau\} = \varphi(v)\varphi(-v)x, \tag{29}$$

$$y' = \varphi(-v)\eta = \varphi(v)\varphi(-v)y, \tag{30}$$

$$z' = \varphi(-v)\zeta = \varphi(v)\varphi(-v)z. \tag{31}$$

Jelikož tyto vztahy mezi x', y', z' a x, y, z neobsahují čas t, systémy K a K' splývají a je jasné, že transformace od K k K' musí být identickou transformací. Takže:

$$\varphi(v)\varphi(-v) = 1. \tag{32}$$

Ptejme se nyní na význam $\varphi(v)$. Vezměme v úvahu úsek osy H systému k ležící mezi $\xi=0, \eta=0, \zeta=0$ a $\xi=0, \eta=l, \zeta=0$. Tento kus osy H je vzhledem k systému K tyčí pohybující se rychlostí v kolmo k její ose. Její konce mají v K souřadnice:

$$x_1 = vt,\ y_1 = \frac{l}{\varphi(v)},\ z_1 = 0 \tag{33}$$

a

$$x_2 = vt,\ y_2 = 0,\ z_2 = 0. \tag{34}$$

Délka tyče měřená v K je tedy $\frac{l}{\varphi(v)}$. Tím je určen význam funkce φ. Z důvodu symetrie je nyní jasné, že délka určité tyče, která se pohybuje kolmo na svou osu, měřená ve stojícím systému, může záviset pouze na rychlosti, nikoliv však na směru a orientaci pohybu. Délka pohybující tyče měřená ve stojícím systému se tedy nemění při záměně v na $-v$. Odsud plyne

$$\frac{l}{\varphi(v)} = \frac{l}{\varphi(-v)}, \tag{35}$$

neboli

$$\varphi(v) = \varphi(-v). \tag{36}$$

Z tohoto a z předtím odvozeného vztahu plyne, že musí být $\varphi(v)=1$, takže nalezené transformační rovnice přecházejí v

$$\tau = \beta(t - \frac{v}{V^2}x), \tag{37}$$

$$\xi = \beta(x - vt), \tag{38}$$

$$\eta = y, \tag{39}$$

$$\zeta = z, \tag{40}$$

kde

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}}. \tag{41}$$

1.4 Fyzikální význam získaných rovnic, týkající se pohybujících se tuhých těles a pohybujících se hodin

Uvažujme tuhou kouli[3]) o poloměru R, která je v klidu vzhledem k systému k a jejíž střed leží v počátku systému k. Rovnice povrchu této koule pohybující se vzhledem k systému K rychlostí v je

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = R^2. \tag{42}$$

Rovnice tohoto povrchu vyjádřená v x, y, z v čase $t = 0$ je

$$\frac{x^2}{\left(\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}\right)^2} + y^2 + z^2 = R^2. \tag{43}$$

Tuhé těleso, které má v klidu tvar koule, má tedy při pohybu tvar – pozorovaný ze stojícího systému – rotačního elipsoidu s osami délky

$$R\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2},\ R,\ R. \tag{44}$$

Zatímco tedy y-ový a z-ový rozměr koule (a tedy také každého tuhého tělesa libovolného tvaru) se při pohybu nemění, jeví se x-ový rozměr zkrácen v poměru $1 : \sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}$, tedy tím více, čím je v větší. Při $v = V$ se všechny pohybující se předměty – pozorované ze „stojícího“ systému – smrští v plochý útvar. Při nadsvětelných rychlostech ztrácejí naše úvahy smysl. V následujících pozorováních ostatně zjistíme, že rychlost světla hraje v naší teorii fyzikálně roli nekonečně velké rychlosti.

Je jasné, že stejné výsledky platí pro tělesa stojící ve „stojícím“ systému, jestliže jsou pozorována z rovnoměrně se pohybujícího systému.

Uvažme dále hodiny, které jsou schopné ukazovat čas t, jestliže stojí vzhledem ke stojícímu systému, a čas τ, jestliže stojí vzhledem k pohybujícímu se systému, položené v počátku souřadnic systému k a seřízené tak, že ukazují čas τ. Jak rychle jdou tyto hodiny, pozorovány ze stojícího systému ?

[3]To znamená těleso, které má tvar koule při pozorování v klidu.

Mezi veličinami x, t a τ, které jsou vztažené k místu, kde se tyto hodiny nacházejí, platí zřejmě rovnice

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}}\left(t - \frac{v}{V^2}x\right) \tag{45}$$

a

$$x = vt. \tag{46}$$

Je tedy

$$\tau = t\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2} = t - \left(1-\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}\right)t. \tag{47}$$

Odtud plyne, že údaj hodin (pozorovaný z klidového systému) se za sekundu opožďuje o $\left(1-\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}\right)$ sekundy neboli do veličin čtvrtého a vyššího řádu o $\frac{1}{2}(v/V)^2$ sekundy.

Odtud vyplývá následující zvláštní důsledek. Nechť jsou v bodech A a B ve stojícím systému K k dispozici nepohybující se synchronně jdoucí hodiny. Přesuneme-li hodiny z A rychlostí v po spojnici obou bodů do B, nepůjdou již po příchodu těchto hodin do B oboje hodiny synchronně, nýbrž hodiny přesunuté z A do B půjdou oproti hodinám, které se od začátku nacházejí v B, o $\frac{1}{2}t(v/V)^2$ sekundy opožděně (do veličin čtvrtého a vyššího řádu), kde čas t potřebovaly hodiny k přesunu z A do B.

Vidíme ihned, že tento výsledek platí také, když se hodiny pohybují z A do B podél libovolných lomených čar a sice také tehdy, když body A a B splývají.

Lze se domnívat, že výsledek odvozený pro lomené dráhy platí také pro plynule zakřivené křivky, takže jsme získali větu: Nechť se v A nalézají dvoje synchronně jdoucí hodiny a nechť se jedny z nich přesunou za dobu t po uzavřené křivce stálou rychlostí zpět do bodu A. Pak jdou tyto hodiny při svém návratu do A vzhledem k hodinám, které zůstaly v klidu, o $\frac{1}{2}t(v/V)^2$ opožděně. Je možné usuzovat, že hodiny nacházející se na zemském rovníku musí jít nepatrně pomaleji než zcela stejně sestavené hodiny, vystavené jinak stejným podmínkám, nacházející se na zemském pólu.

1.5 Věta o sčítání rychlostí

Nechť se v systému k, který se pohybuje vzhledem k systému K podél osy X rychlostí v, pohybuje bod podle rovnic

$$\xi = w_\xi \tau, \tag{48}$$

$$\eta = w_\eta \tau, \tag{49}$$
$$\zeta = 0, \tag{50}$$

kde w_ξ a w_η označuje konstanty.

Hledáme pohyb bodu vzhledem k systému K. Dosadíme-li pomocí transformačních rovnic odvozených v kap. 1.2 do pohybových rovnic bodu veličiny x, y, z, t, dostáváme

$$x = \frac{w_\xi + v}{1 + \frac{v w_\xi}{V^2}} t, \tag{51}$$
$$y = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}{1 + \frac{v w_\xi}{V^2}} w_\eta t, \tag{52}$$
$$z = 0. \tag{53}$$

Zákon o rovnoběžníkovém skládání rychlostí tedy platí v naší teorii pouze v prvním přiblížení. Položíme

$$U^2 = \left(\frac{d\,x}{d\,t}\right)^2 + \left(\frac{d\,y}{d\,t}\right)^2, \tag{54}$$
$$w^2 = w_\xi^2 + w_\eta^2 \tag{55}$$

a

$$\alpha = \arctan \frac{w_y}{w_x}; \tag{56}$$

α pak považujeme za úhel mezi rychlostmi v a w. Z jednoduchého výpočtu plyne

$$U = \frac{\sqrt{(v^2 + w^2 + 2vw\cos\alpha) - \left(\frac{vw\sin\alpha}{V}\right)^2}}{1 + \frac{vw\cos\alpha}{V^2}}. \tag{57}$$

Stojí za pozornost, že v a w vystupují ve výrazu pro výslednou rychlost symetricky. Má-li w také směr osy X (osy Ξ), získáváme

$$U = \frac{v + w}{1 + \frac{vw}{V^2}}. \tag{58}$$

Z těchto rovnic plyne, že výsledkem složení dvou rychlostí, které jsou menší než V, je vždy rychlost menší než V. Položíme-li totiž $v = V - \kappa$, $w = V - \lambda$, kde κ a λ jsou kladná a menší než V, je

$$U = V \frac{2V - \kappa - \lambda}{2V - \kappa - \lambda + \frac{\lambda\kappa}{V}} < V. \tag{59}$$

Dále odsud plyne, že rychlost světla V se nemůže změnit složením s podsvětelnou rychlostí. V tomto případě dostáváme

$$U = \frac{V + v}{1 + \frac{w}{V}} = V. \tag{60}$$

Vzorce pro V jsme v případě, že v a w mají stejný směr, mohli také získat složením dvou transformací podle kap. 1.2. Zavedeme-li kromě systémů K a k vystupujících v kap. 1.2 ještě třetí souřadný systém k' pohybující se rovnoměrně přímočaře vzhledem k k, jehož počátek se pohybuje podél osy Ξ rychlostí w, dostáváme mezi veličinami x, y, z, t a odpovídajícími veličinami v systému k' rovnice, které se od oněch nalezených v kap. 1.2 liší pouze tím, že na místě v vystupuje veličina

$$\frac{v + w}{1 + \frac{vw}{V^2}}. \tag{61}$$

Odsud je vidět, že takové rovnoběžné transformace tvoří – tak, jak tomu musí být – grupu.

Nyní jsme odvodili pro nás potřebné věty kinematiky odpovídající našim dvěma principům a přejdeme dále k výkladu jejich použití v elektrodynamice.

Obsah