Kvantová fyzika – cvičení s návody a výsledky

October 1, 2007

Návody zde uvedené jsou záměrně uváděny ve stručné formě, jako nápověda a vodítko, jak při řešení úloh postupovat; nepředstavují a nenahrazují detailní popis řešení vyžadovaný při cvičeních. Obzvláště nejsou explicitně rozepisovány výpočty integrálů apod. V některých jednoduchých příkladech je návod nahrazen pouze výsledkem. Při řešení příkladu je vhodné návod využívat pouze tehdy, pokud nemáte žádný nápad, jak při řešení postupovat.

Cvičení 1 *Napište rozdělovací funkci Gaussova pravděpodobnostního rozdělení. Interpretujte význam jejích parametrů. Vypočítejte jeho momenty. Napište vzorec pro*

$$I(n,a,b) := \int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-ax^2+bx} dx,\ \ n \in \mathbf{Z},\ \ a,b \in \mathbf{C},\ \ Re\ a > 0.$$

(Zapamatujte si jej pro n=0,1,2!)

Návod: Rozdělovací funkce

$$\rho(x) = N e^{-\frac{(x-\alpha)^2}{2\sigma^2}}$$

Normalizace: $\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x)dx = N\sqrt{2\pi}\sigma = 1$, tj. $N = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$ (k výpočtu integrálu je vhodné počítat jeho kvadrát $(\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-y^2)dy)^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-y^2 - z^2)dydz$ přechodem do polárních souřadnic)
Momenty: definice

$$\langle (x-\alpha)^n \rangle_\rho = N \int_{-\infty}^{\infty} (x-\alpha)^n e^{-\frac{(x-\alpha)^2}{2\sigma^2}} dx$$

Výsledky se liší pro n liché, resp. sudé:

$$\langle (x-\alpha)^{2n+1}\rangle_\rho = 0,\ \langle (x-\alpha)^{2n}\rangle_\rho = \sigma^{2n}(2n-1)!!$$

Hledaný vzorec:

$$I(n,a,b) := \int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-ax^2+bx} dx = e^{\frac{b^2}{4a}} \sum_{j=0}^{[\frac{n}{2}]} (\frac{b}{2a})^{n-2j} \frac{n!}{(n-2j)!j!2^{2j}} \frac{\sqrt{\pi}}{a^{j+\frac{1}{2}}}$$

Cvičení 2 *Jaká je hustota pravděpodobnosti nalezení klasického jednorozměrného oscilátoru s energií E v intervalu $(x, x+dx)$? Co potřebujeme znát, chceme-li tento pravděpodobnostní výrok změnit v deterministickou předpověď?*

Návod: $\rho(x)dx = \frac{doba\, stravena\, v\, intervalu \langle x, x+dx\rangle}{pulperioda} = \frac{\frac{dx}{|v(x)|}}{T/2} = \frac{2dx}{\frac{2\pi}{\omega}\sqrt{2(E-V(x))/m}} = \frac{dx}{\pi\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}-x^2}}$, je vhodné si ověřit normalizaci $\int_{-\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}}^{\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}} \rho(x)dx = 1$. K deterministické předpovědi potřebujeme znát polohu (nebo rychlost či hybnost) v jednom časovém okamžiku (tj. počáteční podmínku).

Cvičení 3 *Popište jednorozměrný harmonický oscilátor Hamiltonovskou formulací klasické mechaniky. Napište a vyřešte pohybové rovnice. Napište rovnici pro fázové trajektorie. Hodnotou jaké fyzikální veličiny jsou určeny?*

Návod: $H(p,q) = \frac{1}{2}(\frac{p^2}{m} + m\omega^2 q^2)$
Pohybové rovnice

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p},\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

tj.

$$\dot{q} = \frac{p}{m},\ \dot{p} = -m\omega^2 q$$

Řešení: $q(t) = A\sin(\omega t + \alpha)$, $p(t) = A\omega m \cos(\omega t + \alpha)$,
Rovnice pro fázové trajektorie – získáme vyloučením času z pohybových rovnic, jsou určeny hodnotou energie

$$\frac{p^2}{2A^2\omega^2 m^2} + \frac{q^2}{2A^2} = 1$$

Cvičení 4 *Určete vlnovou délku a frekvenci de Broglieovy vlny pro molekulu kyslíku ve vzduchu vašeho pokoje a pro částici o hmotnosti 10 μg pohybující se rychlostí zvuku.*

Návod: Kyslík: $E = \frac{3}{2}kT \doteq 6,2\,10^{-21}J$ $(T = 300K)$, $p = \sqrt{2m_{O_2}E} = \ldots$, z de Broglieho vztahů pak plyne $\lambda = \frac{h}{p} = 2,58\,10^{-11}$m. Částice: obdobně $\lambda = 2\,10^{-28}$m.

Cvičení 5 *Podle de Broglieovy hypotézy určete ohyb způsobený průletem tenisového míčku (m = 0.1 kg) rychlostí 0,5 m/s obdélníkovitým otvorem ve zdi o rozměrech* 1×1.5 *m.*

Návod: Z Vlnění, optiky ... je známo $\theta \doteq \lambda/L$, kde L je šířka štěrbiny, po dosazení $1.3\,10^{-32}$ rad, resp. $9\,10^{-33}$ rad.

Cvičení 6 *Na jakou rychlost je třeba urychlit elektrony aby bylo možno pozorovat jejich difrakci na krystalové mříži s charakteristickou vzdáleností atomů 0.1 nm?*

Návod: Z podmínky $\lambda \doteq 0,1$nm nalezneme přibližně $v = 7,3\,10^{6}\mathrm{ms}^{-1}$.

Cvičení 7 *Nechť* $V(\vec{x}) = 0$ *(volná částice). Pomocí Fourierovy transformace určete řešení Schrödingerovy rovnice, které v čase* t_0 *má tvar*

$$\psi(\vec{x}, t_0) = g(\vec{x}) = C \exp[-Ax^2 + \vec{B}\vec{x}] \tag{1}$$

kde Re $A > 0,\ \vec{B} \in \mathbf{C}^3,\ C \in \mathbf{C}.$

Návod: Při řešení používáme Fourierovu transformaci (FT) $\psi(\vec{x}, t) = \int \int \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{i\vec{p}\vec{x}}{\hbar}} \tilde{\psi}(\vec{p}, t) d^3\vec{p}$ a rozklad vlnové funkce na součin vlnových funkcí závisejících na jednotlivých kartézských souřadnicích $\psi(\vec{x}, t) = \psi_1(x, t)\psi_2(y, t)\psi_3(z, t)$. Postupně nalezneme zpětnou FT počáteční podmínky

$$\tilde{\psi}_j(p_j, t_0) = \frac{C^{1/3}}{2\pi\hbar}\sqrt{\frac{\pi}{A}} e^{\frac{(B_j - \frac{i}{\hbar}p_j)^2}{4A}},$$

pak časový vývoj $\tilde{\psi}_j(p_j, t)$

$$\tilde{\psi}_j(p_j, t) = \tilde{\psi}_j(p_j, t_0) e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{p_j^2(t-t_0)}{2m}} = \frac{C^{1/3}}{2\pi\hbar}\sqrt{\frac{\pi}{A}} e^{\frac{(B_j - \frac{i}{\hbar}p_j)^2}{4A}} e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{p_j^2(t-t_0)}{2m}}$$

a konečně opět pomocí FT

$$\psi(\vec{x},t) = C\chi(t)^{-3/2} e^{\frac{\vec{B}^2}{4A}} e^{-A\frac{[\vec{x}-\vec{B}/(2A)]^2}{\chi(t)}},$$

kde $\chi(t) = 1 + \frac{2iA\hbar}{m}(t-t_0)$.

Cvičení 8 *Nechť $\psi(x,y,z,t)$ je řešením Schrödingerovy rovnice pro volnou částici. Ukažte, že*

$$\tilde{\psi}(x,y,z,t) := \exp[-i\frac{Mg}{\hbar}(zt + gt^3/6)]\,\psi(x,y,z+gt^2/2,t)$$

je řešením Schrödingerovy rovnice pro částici v homogenním poli se zrychlením g.

Návod: Dosaďte do Schrödingerovy rovnice a proveďte časovou derivaci.

Cvičení 9 *Čemu je úměrná pravděpodobnost nalezení částice popsané de Broglieovou vlnou*

$$\psi_{\vec{p},E}(\vec{x},t) = Ae^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\vec{x}-Et)}, \tag{2}$$

v oblasti $(x_1,x_2)\times(y_1,y_2)\times(z_1,z_2)$?

Návod: Protože $|\psi(\vec{x},t)|^2 = |A|^2 = konst.$, je pravděpodobnost nalezení částice popsané de Broglieovou vlnou úměrná objemu uvažované oblasti.

Cvičení 10 *Jaká je pravděpodobnost nalezení elektronu vodíkového obalu ve vzdálenosti $(r, r+dr)$ od jádra, je-li popsán (v čase t_0) funkcí*

$$g(x,y,z) = Ae^{-\sqrt{x^2+y^2+z^2}/a_0},$$

kde $a_0 = 0.53\times10^{-8}$ cm je tzv. Bohrův poloměr?

Návod: Převeďte do sférických souřadnic (nezapomeňte, že nestačí jen přepsat vzorec pro hustotu pravěpodobnosti, také tam přispěje Jakobián transformace), pak integrujte přes úhlové proměnné. Výsledek je úměrný $r^2e^{-\frac{2r}{a}}$, nakreslete si graf.

Cvičení 11 *Nalezněte vlastní hodnoty energie kvantové částice pohybující se v jednorozměrné konstantní "nekonečně hluboké potenciálové jámě" t.j. v potenciálu $V(x) = 0$ pro $|x| < a$ a $V(x) = \infty$ pro $|x| > a$.*
Návod: Předpokládejte, že vlnové funkce jsou všude spojité a nulové pro $|x| \geq a$.

Návod: Uvnitř "jámy" má vlnová funkce tvar vlnové funkce pro volnou částici. Z podmínek na okrajích $\psi(-a) = 0 = \psi(a)$ dostáváme soustavu homogenních rovnic, požadavek nulovosti jejího determinantu dává rovnici pro energii, výsledek je $E = \frac{\hbar^2\pi^2k^2}{8ma^2},\ k \in \mathcal{N}$.

Cvičení 12 *Najděte ortonormální basi v $\mathbf{C}^2$, jejíž prvky jsou vlastními vektory matice*

$$\sigma_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Výsledek: Vlastní čísla ± 1, normalizované vlastní vektory $\vec{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Cvičení 13 *Jaká je hustota pravděpodobnosti nalezení kvantového jednorozměrného oscilátoru s energií $\hbar\omega(n+\frac{1}{2})$ v bodě x ? Spočítejte a nakreslete grafy této hustoty pro $n = 0, 1, 2, \ldots$ a srovnejte je s hustototu pravděpodobnosti výskytu klasického oscilátoru v daném místě.*

Výsledek:

$$n = 0 : \ |\psi_0(x)|^2 = |A_0|^2 e^{-\xi^2},$$
$$n = 1 : \ |\psi_1(x)|^2 = 4|A_1|^2 \xi^2 e^{-\xi^2},$$
$$n = 2 : \ |\psi(x)|^2 = 4|A_2|^2 (2\xi^2 - 1)^2 e^{-\xi^2}.$$

V grafech je počet maxim roven stupni příslušného Hermiteova polynomu $+1$.

Cvičení 14 *Spočítejte komutátory*

$$[L_j, X_k],\ [L_j, P_k],\ [L_j, L_k], \tag{3}$$

kde

$$\hat{L}_j := \epsilon_{jkl}\hat{X}_k\hat{P}_l \tag{4}$$

Výsledek: $[L_j, X_k] = i\hbar\epsilon_{jkl}\hat{X}_l$, $[L_j, P_k] = i\hbar\epsilon_{jkl}\hat{P}_l$, $[L_j, L_k] = i\hbar\epsilon_{jkl}\hat{L}_l$, tj. operátory $\hat{\vec{X}}, \hat{\vec{P}}, \hat{\vec{L}}$ jsou tzv. vektorové operátory (kvantová analogie vektorů $\vec{x}, \vec{p}, \vec{l}$, tj. objektů se správnými transformačními vlastnostmi vzhledem ke grupě rotací prostoru $SO(3)$).

Cvičení 15 *"Kvantové tuhé těleso" (např. dvouatomová molekula) s momentem setrvačnosti I_z volně rotuje v rovině. Najděte její možné hodnoty energie.*

Návod: $H = -\frac{\hbar^2}{2I_z}\frac{d^2}{d\phi^2}$ (viz princip korespondence a klasickou kinetickou energii $\frac{1}{2}I_Z\dot{\phi}^2$). Řešením stacionární Schrödingerovy rovnice nalezneme řešení ve tvaru $\psi(\phi) = Ae^{i\alpha\phi} + Be^{-i\alpha\phi}$, $\alpha = \ldots$ a z požadavku jednoznačnosti $\psi(\phi) = \psi(\phi + 2\pi)$ najdeme možné hodnoty energie $E_m = \frac{m^2\hbar^2}{2I_z}$, $m \in \mathcal{Z}$.

Cvičení 16 *Odvoďte pravděpodobnosti nalezení částice v daném prostorovém úhlu pro stavy s, p, d.*

Výsledek:

$l = 0: \ |Y_{0,0}|^2 = C_{0,0}$

$l = 1: \ |Y_{1,-1}|^2 = C_{1,-1}\sin^2(\theta)$, $|Y_{1,0}|^2 = C_{1,0}\cos^2(\theta)$, $|Y_{1,1}|^2 = C_{1,1}\sin^2(\theta)$,

$$\begin{aligned} l = 2: \ & |Y_{2,-2}|^2 = C_{2,-2}\sin^4(\theta),\ |Y_{2,-1}|^2 = C_{2,-1}\sin^2(\theta)\cos^2(\theta), \\ & |Y_{2,0}|^2 = C_{2,0}(\tfrac{3}{2}\cos^2(\theta) - \tfrac{1}{2})^2,\ |Y_{2,1}|^2 = C_{2,1}\sin^2(\theta)\cos^2(\theta), \\ & |Y_{2,2}|^2 = C_{2,2}\sin^4(\theta) \end{aligned}$$

Nakreslete si grafy (nejlépe trojrozměrné na počítači).

Cvičení 17 *Napište všechny vlnové funkce harmonického oscilátoru pro stavy s energiemi $3/2\hbar\omega$, $5/2\hbar\omega$ a $7/2\hbar\omega$.*

Výsledek: Nezapomeňte na degeneraci energie, výsledek lze zapsat různými způsoby, např. jako součin vlastních funkcí jednorozměrného oscilátoru nebo pomocí vlastních funkcí $\hat{H}, \hat{L}^2, \hat{L}_z$.

Cvičení 18 *Spočtěte střední hodnoty složek hybnosti kvantové částice v Coulombově poli s energií $-\frac{MQ^2}{2\hbar^2}$ a nulovým momentem hybnosti (elektron v atomu vodíku ve stavu 1s).*

Návod: Využijte tvar $\hat{P}_i$ ve sférických souřadnicích a spočítejte $\langle\hat{P}_i\rangle_\psi = (\psi, \hat{P}_i\psi)/(\psi, \psi)$. Výsledek je $\langle\hat{P}_i\rangle_\psi = 0$ (jak lze ostatně očekávat ze symetrie vlnové funkce).

Cvičení 19 *Spočtěte střední hodnoty složek polohy kvantové částice popsané vlnovou funkcí (1).*

Výsledek: $\langle\hat{X}_i\rangle_\psi = \frac{\Re B_i}{2\Re A}$

Cvičení 20 *Spočtěte střední hodnoty složek hybnosti kvantové částice popsané vlnovou funkcí (1). Napište tvar vlnové funkce (1) popisující vlnový balík se střední hodnotou hybnosti $\vec{p}_0$, který má v čase t_0 střední hodnotu polohy $\vec{x}_0$.*

Výsledek: $\langle\hat{P}_i\rangle_\psi = -i\hbar(B_i - A\frac{\Re B_i}{\Re A}) \overset{A\in\mathbf{R}}{=} \hbar\Im B_i$
Vlnový balík:

$$\psi(x,t) = C\chi(t)^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{\vec{B}^2}{4A}}e^{-A\frac{(\vec{x}-\frac{\vec{B}}{2A})^2}{\chi(t)}},$$

kde $\vec{B} = 2A\vec{x}_0 + \frac{i}{\hbar}\vec{p}_0$.

Cvičení 21 *Určete pravděpodobnost nalezení hybnosti částice popsané vlnovou funkcí*

$$\psi(x) = Ce^{-\vec{x}^2+ix_1} \tag{5}$$

v intervalu $(a_1,b_1)\times(a_2,b_2)\times(a_3,b_3)$. Určete hustotu pravděpodobnosti nalezení hybnosti v okolí hodnoty $\vec{p}_0$.

Výsledek: Ozn. $J = (a_1,b_1)\times(a_2,b_2)\times(a_3,b_3)$, $\vec{k} = (1,0,0)$

$$P_{\vec{p}\in J} = \frac{\int_J e^{-\frac{(\vec{k}-\frac{\vec{p}}{\hbar})^2}{2}}\,d^3\vec{p}}{(\sqrt{2\pi}\hbar)^3}.$$

Cvičení 22 *Nechť "jednorozměrná" částice s hmotou M v potenciálu harmonického oscilátoru s vlastní frekvencí $\omega = \hbar/M$ je ve stavu popsaném vlnovou funkcí*

$$\psi(x) = Ce^{-x^2+ix} \tag{6}$$

S jakou pravděpodobností naměříme hodnoty její energie rovné $\frac{1}{2}\hbar\omega$ resp. $\hbar\omega$, $\frac{3}{2}\hbar\omega$?

Návod: S využitím znalosti vlastních funkcí harmonického oscilátoru a definice pravděpodobnosti přechodu do přísl. vlastních stavů lze snadno spočítat $P_{E=\frac{1}{2}\hbar\omega} = \frac{2\sqrt{2}}{3}e^{-\frac{1}{3}}$, $P_{E=\frac{3}{2}\hbar\omega} = \frac{4\sqrt{2}}{27}e^{-\frac{1}{3}}$, energii $\hbar\omega$ nelze naměřit (není ve spektru).

Cvičení 23 *Nechť částice s hmotou M v potenciálu harmonického oscilátoru s vlastní frekvencí $\omega = \hbar/M$ je ve stavu popsaném vlnovou funkcí*

$$\psi(x) = Ce^{-\vec{x}^2 + ix_1} \tag{7}$$

S jakou pravděpodobností naměříme hodnoty její energie rovné $\frac{5}{2}\hbar\omega$?

Návod: Nezapomeňte, že energie $\frac{5}{2}\hbar\omega$ třírozměrného harmonického oscilátoru je degenerovaná, musíte spočítat pravděpodobnosti přechodu do jednotlivých ortogonálních vlastních stavů příslušných k této energii a pak je sečíst. Výsledná pravděpodobnost: $e^{-\frac{1}{3}}\frac{32\sqrt{2}}{243}$.

Cvičení 24 *Nechť částice hmotnosti M v jednorozměrné nekonečně hluboké potenciálové jámě šířky $2a$ je v čase $t = 0$ popsána vlnovou funkcí, (která je superposicí stacionárních stavů)*

$$\psi(x,0) = 0, \text{ pro } |x| > a, \;\; \psi(x,0) = sin[\frac{\pi}{2a}(x-a)] + sin[\frac{\pi}{a}(x-a)], \text{ pro } |x| < a.$$

Jaká je pravděpodobnost, že částice se v čase $t = 0$ a $t = \frac{8Ma^2}{\pi\hbar}$ bude nacházet v intervalu (-a,0)?

Návod: V případě superpozice stacionárních stavů snadno naleznete časový vývoj, pak stačí prointegrovat $|\psi|^2$ přes $(-a, 0)$ a normovat. Výsledek:

$t = 0 \ldots P_0 = \frac{-8+3\pi}{6\pi}$,

$t = \frac{8Ma^2}{\pi\hbar} \ldots P = \frac{8+3\pi}{6\pi}$.

Cvičení 25 *Nechť jednorozměrná částice v poli harmonického oscilátoru je v čase $t = 0$ ve stavu*

$$\psi(x,0) = A\psi_0 + B\psi_1$$

kde $A, B \in \mathbf{R}$, ψ_n vlastní stavy energie normalizované k 1. V jakém stavu je v libovolném čase $t > 0$?

Návod: Zůstává superpozicí stavů ψ_0, ψ_1, určete časový vývoj koeficientů lineární kombinace.

Cvičení 26 *Nalezněte operátor rychlosti pro částici v elektromagnetickém poli.*

Návod: $\dot{\hat{\vec{Q}}} = \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{\vec{Q}}] = \ldots$, výsledek odpovídá dle principu korespondence (nikoliv překvapivě) výsledku v klasické mechanice.

Cvičení 27 *Ukažte, že vlastní čísla operátoru $\hat{\vec{\mu}} \cdot \vec{B}$ jsou $\pm\mu_0|\vec{B}|$. Najděte vlastní funkce.*

Návod: Využijte toho, že po nalezení vlastních čísel již víte, že rovnice pro odpovídající vlastní vektory má netriviální řešení, tj. řádky matice soustavy jsou lineárně závislé a tím pádem neřešíte soustavu, ale jednu rovnici pro 2 neznámé konstanty.

Cvičení 28 *Ukažte že $\hat{\vec{S}}^2 = \frac{3}{4}\hbar^2\mathbf{1}$. Porovnejte tento výsledek s $\hat{\vec{L}}^2$.*

Výsledek: Odpovídající l pro spin je $\frac{1}{2}$, tj. spin elektronu je “poločíselný”.

Cvičení 29 *Nechť pro volnou částici se spinem je naměřena hodnota z–ové složky spinu s_z=$\hbar/2$. Jestliže vzápětí měříme hodnotu spinu ve směru, který se z–ovou osou svírá úhel Θ, jaké můžeme naměřit hodnoty a s jakou pravděpodobností?*

Návod: Najděte si nějaký operátor spinu svírajícího se z–ovou osou úhel Θ (např. $\frac{\hbar}{2}\left(\cos(\Theta)\sigma_3 + \sin(\Theta)\sigma_1\right)$), příslušné pravděpodobnosti získáte patřičnými skalárnímy součiny vlastních vektorů, výsledky: $P(+\frac{\hbar}{2}) = \frac{1}{2}\cos\Theta + \frac{1}{2}$, $P(-\frac{\hbar}{2}) = -\frac{1}{2}\cos\Theta + \frac{1}{2}$.

Cvičení 30 *Částice se spinem $\hbar/2$ je umístěna v konstantním magnetickém poli směřujícím ve směru osy x. V čase $t = 0$ byla naměřena hodnota její z-ové složky spinu $+\hbar/2$. S jakou pravděpodobností nalezneme v libovolném dalším čase hodnotu její y-ové složky spinu $+\hbar/2$?*

Výsledek: $P_{S_y=\frac{\hbar}{2}} = \frac{1}{2}\left(\cos(\frac{B_x\mu t}{\hbar}) + \sin(\frac{B_x\mu t}{\hbar})\right)^2$.

Cvičení 31 *Ukažte, že pokud výraz $\exp[i\vec{a}\cdot\vec{\sigma}]$ definujeme pomocí řady*

$$\exp[i\vec{a}\cdot\vec{\sigma}] := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\vec{a}\cdot\vec{\sigma})^n}{n!}, \tag{8}$$

pak platí

$$\exp[i\vec{a}\cdot\vec{\sigma}] = \cos(|\vec{a}|) + i\frac{\vec{a}\cdot\vec{\sigma}}{|\vec{a}|}\sin(|\vec{a}|) \tag{9}$$

Návod: Spočtěte nejprve $(\vec{a}\cdot\vec{\sigma})^2$ a povšimněte si, že je to násobek jednotkové matice, pak sumu rozdělte na součet přes sudé a liché indexy.

Cvičení 32 *Napište vlnovou funkci $\psi(\vec{x},\xi)$ základního stavu částice v poli Coulombova potenciálu s hodnotou z–ové, resp. x–ové, resp. y–ové složky spinu rovné $\hbar/2$.*

Návod: Protože $\hat{H}$ je ve spinovém prostoru diagonální, bude mít základní stav stejnou energii, jako když spin neuvažujeme, a odpovídající vlastní vektor má tvar $\psi = \begin{pmatrix} \alpha e^{-\frac{r}{a}} \\ \beta e^{-\frac{r}{a}} \end{pmatrix}$. Konstanty α, β určíme tak, aby to byl současně vlastní vektor odpovídající složky spinu.

Cvičení 33 *Najděte energie a vlastní funkce základního a prvního excitovaného stavu dvou nerozlišitelných částic se spinem 0, respektive $\frac{1}{2}$ v poli harmonického oscilátoru.*

Výsledek:
Spin 0:

1. základní stav $E = 3\hbar\omega$, nedegenerovaný
2. 1. excitovaný stav $E = 4\hbar\omega$, 3 lineárně nezávislé stavy

Spin $\frac{1}{2}$:

1. základní stav $E = 3\hbar\omega$, nedegenerovaný
2. 1. excitovaný stav $E = 4\hbar\omega$, 12 lineárně nezávislých stavů

Cvičení 34 *Atom uhlíku má čtyři valenční elektrony (přesvědčte se). Můžeme na něj tedy nahlížet jako na systém čtyř elektronů ve sféricky symetrickém poli. Jaká je pak degenerace jeho základního stavu?*

Výsledek: 15.