1. Kapitola

Sparse řešení podurčených systémů

1.1. Sparse vektory a komprimovatelné vektory

$\mathbb{K} = \mathbb{C}$ nebo $\mathbb{R}$ ... budeme brát $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, pro $\mathbb{C}$ většinou věci podobné

$x \in \mathbb{R}^N$, $N \in \mathbb{N}$, $supp(x) = \{j = 1, \dots, N;\ x_j \neq 0\}$

Definice: $x \in \mathbb{R}^N$ je s-sparse $(s \in \mathbb{N})$ pokud

$$\|x\|_0 := \#\{j : x_j \neq 0\} = \# supp(x) \leq s.$$

Notace: Pro $0 < p < \infty$ značíme

$$\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{N} |x_j|^p\right)^{1/p},\ x \in \mathbb{R}^N \quad \dots\ p\text{-norma} \dots\ 1 \leq p < \infty$$

quasi-norma $\|x+y\|_p \leq C(\|x\|_p + \|y\|_p)$ $\quad 0 < p < 1$

$$\|x\|_\infty = \max_{j=1,\dots,N} |x_j|$$

$p \to 0$ $\quad \lim_{p \to 0} |x_j|^p = \begin{cases} 1 \dots \text{ for } x_j \neq 0 \\ 0 \dots \text{ for } x_j = 0 \end{cases}$

$$\lim_{p \to 0} \|x\|_p^p = \lim_{p \to 0} \sum_{j=1}^{N} |x_j|^p = \|x\|_0 \quad \dots\ \text{"}\ell_0\text{-norm" of } x$$

Struktura množiny s-sparse vektorů

$S \subset \{1, \dots, N\}$, $\# S = s$, $\mathbb{R}^N_S = \{x \in \mathbb{R}^N : supp(x) \subset S\} = \{x \in \mathbb{R}^N : x_j = 0 \text{ pro } j \notin S\}$

$\mathbb{R}^N_S$ je s-dim. podprostor $\mathbb{R}^N$

$$\mathbb{R}^N_s := \bigcup_{\substack{S \subset \{1,\dots,N\} \\ \# S = s}} \mathbb{R}^N_S$$

... množina s-sparse vektorů ... sjednocení $\binom{N}{s}$ podprostorů.

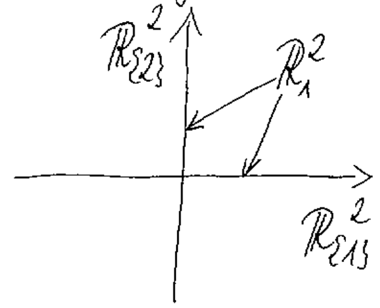
Není lineární prostor

$x, y \in \mathbb{R}_s^N \not\Rightarrow x+y \in \mathbb{R}_s^N$

$\Rightarrow x+y \in \mathbb{R}_{2s}^N$

plyne z $\mathrm{supp}(x+y) \subset \mathrm{supp}(x) \cup \mathrm{supp}(y)$

V $\mathbb{R}^2$:



Pojem s-sparse vektoru je příliš restriktivní. Typické vektory ve vysocedimenzionálních aplikacích mají (krom s velkých koeficientů) i řadu malých koef.

<u>Komprimovatelné vektory</u>: dobře aproximovatelné sparse vektory.

Nechť $x \in \mathbb{R}^N$. Pak existuje (alespoň jedna) permutace $\pi: N \to N$, taková že

$$|x_{\pi(1)}| \geq |x_{\pi(2)}| \geq \dots \geq |x_{\pi(N)}| \geq 0$$

Položme $x_j^* = |x_{\pi(j)}|$. Vektor $x^* = (x_j^*)_{j=1}^N \in \mathbb{R}_+^N = (0,\infty]^N$

... nerostoucí přerovnání x ... jednoznačně určen.

Nechť $S \subset \{1, \dots, N\}$. Položme $(x_S)_j = \begin{cases} x_j & \dots j \in S \\ 0 & \dots j \notin S \end{cases}$ ... restrikce x na S.

Pro $S = \{\pi^{-1}(1), \dots, \pi^{-1}(s)\}$ ... s největších souřadnic

... x_S je best s-term approximace x.

Příklad: $x = (1, -3, 2, 4, -1, -4)$

$x^* = (4, 4, 3, 2, 1, 1)$

$s = 3$: $(0, -3, 0, 4, -1, -4)$

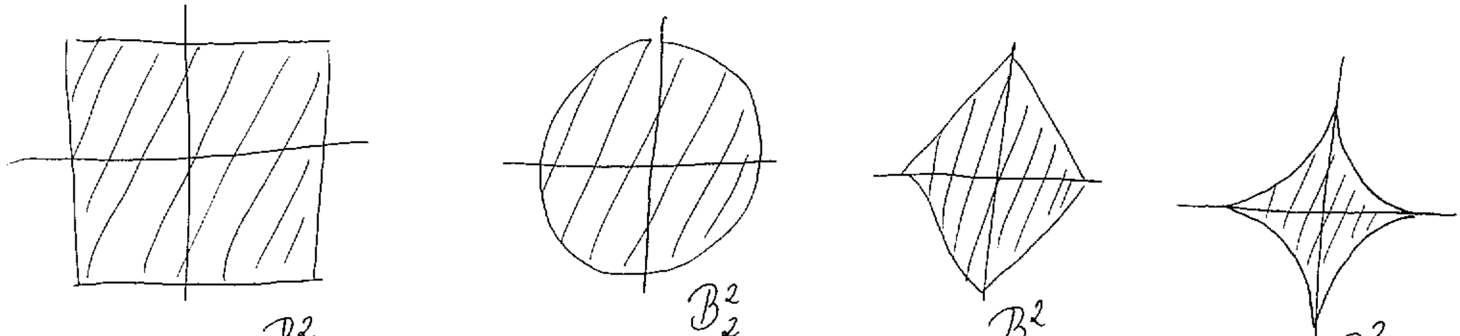
$s = 5$: $(1, -3, 2, 4, 0, -4)$
nebo $(0, -3, 2, 4, -1, -4)$

Chyba best s-term aproximace

$$\sigma_s(x)_p = \inf\{\|x-y\|_p : y \in \mathbb{R}^N_s\} \quad \text{pro } p>0.$$

Neformálně: x je komprimovatelný … $\sigma_s(x)_p$ klesá rychle s rostoucím s.

Geometrie ℓ_p-jednotkových koulí … $B_p^N = \{x \in \mathbb{R}^N : \|x\|_p \le 1\}$



B^2_∞ $\quad$ B^2_2 $\quad$ B^2_1 $\quad$ $B^2_{1/2}$

B_p^N je konvexní pro $p \ge 1$

není $\quad$ pro $p<1$

Věta: Nechť $s \in \{1,\dots,N\}$, $0<p<q\le\infty$ a $x \in \mathbb{R}^N$. Pak platí

$$\sigma_s(x)_q \le \frac{\|x\|_p}{s^{1/p-1/q}}$$

Důkaz: $\sigma_s(x)_q$ a $\|x\|_p$ závisí jen na nerostoucím přerovnání x.

Předpokládejme, že $x_1 \ge x_2 \ge \dots \ge 0$. Pak platí

$$\sigma_s(x)_q = \Big(\sum_{j=s+1}^{N} x_j^q\Big)^{1/q} = \Big(\sum_{j=s+1}^{N} x_j^p x_j^{q-p}\Big)^{1/q} \le x_s^{1-p/q}\Big(\sum_{j=s+1}^{N} x_j^p\Big)^{1/q}$$

$$\le \Big(\frac{1}{s}\sum_{j=1}^{s} x_j^p\Big)^{1/p-1/q} \|x\|_p^{p/q} \le \frac{1}{s^{1/p-1/q}} \cdot \|x\|_p^{p(1/p-1/q)} \|x\|_p^{p/q} = \frac{\|x\|_p}{s^{1/p-1/q}}.$$

Poznámka: Lze vylepšit na $\sigma_s(x)_q \le c_{p,q} \dfrac{\|x\|_p}{s^{1/p-1/q}}$, kde $c_{p,q} = \Big[\Big(\frac{p}{q}\Big)^{p/q}\Big(1-\frac{p}{q}\Big)^{1-p/q}\Big]^{1/p} \le 1$

je optimální!

Then: $\sigma_s(x)_2 \le \dfrac{\|x\|_1}{\sqrt{s}}$, ale $\sigma_s(x)_2 \le \dfrac{\|x\|_1}{2\sqrt{s}}$ možné!

Poznámka: $x \in B_p^N$

$$j\cdot (x_j^*)^p \le \sum_{k=1}^{j} (x_k^*)^p \le 1 \ldots \quad (x_j^*)^p \le j^{-1} \ldots \quad x_j^* \le j^{-1/p}$$

$$\ldots \|x\|_{p,\infty} = \max_{j=1,\ldots,N} j^{1/p} x_j^* \le \|x\|_p$$

↑ weak-Lebesgue space

Lemma: $x,y \in \mathbb{R}^N$, $k,s \in \{1,\ldots,N\}$, $k>s$. Pak

1, $\|x^*-y^*\|_\infty \le \|x-y\|_\infty$

2, $|\sigma_s(x)_1 - \sigma_s(y)_1| \le \|x-y\|_1$

3, $(k-s)x_k^* \le \|x-y\|_1 + \sigma_s(y)_1$

Důkaz: 1, $$x_k^* = \min_{T:\#T<k} \max_{j\in\{1,\ldots,N\}\setminus T} |x_j|$$

$$\le \min_{T:\#T<k} \max_{j\in\{1,\ldots,N\}\setminus T} |x_j-y_j|+y_j$$

$$\le \|x-y\|_\infty + y_k^* \quad \Rightarrow \quad x_k^*-y_k^* \le \|x-y\|_\infty$$

2, Nechť z je best s-term aproximace y. Pak platí

$$\sigma_s(x)_1 \le \|x-z\|_1 \le \|x-y\|_1 + \|y-z\|_1 = \|x-y\|_1 + \sigma_s(y)_1 \quad \ldots \text{ \& symetrie}$$

3, $$(k-s)\,x_k^* \le \sum_{j=s+1}^{k} x_j^* \le \sum_{j=s+1}^{\cancel{k}N} x_j^* = \sigma_s(x)_1 \le \|x-y\|_1 + \sigma_s(y)_1 .$$

1.2. Minimální počet měření pro rekonstrukci s-sparse vektorů

Compressed Sensing Setting

- $x \in \mathbb{R}^N$ ... vektor, signál
- $A \in \mathbb{R}^{m \times N}$ ... $m \times N$ matice

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} - a_1 - \\ \vdots \\ - a_m - \end{pmatrix}}_{N} \Big\} m$$

... Měření ... skalární součin s jiným vektorem ... s $a_1, \dots, a_m$

$$Ax = \begin{pmatrix} \langle a_1, x \rangle \\ \vdots \\ \langle a_m, x \rangle \end{pmatrix}$$ ... Ax je m měření x.

- $y = Ax$ je dáno.

<u>Problém</u>: Jaké je minimální množství měření <u>m</u> tak, aby bylo možné každý vektor $x \in \mathbb{R}^N_s$ zrekonstruovat z y?

<u>Věta</u>: Nechť $y \in \mathbb{R}^m$, $A \in \mathbb{R}^{m \times N}$, $y = Ax$ pro $x \in \mathbb{R}^N_s$ s $\#\mathrm{supp}(x) = s$.
Pak je ekvivalentní

1, x je jediné řešení rovnice $Az = y$ v $\mathbb{R}^N_s$ ... $\{z \in \mathbb{R}^N_s : Az = y\} = \{x\}$.

2, x je jediné řešení optimizačního problému

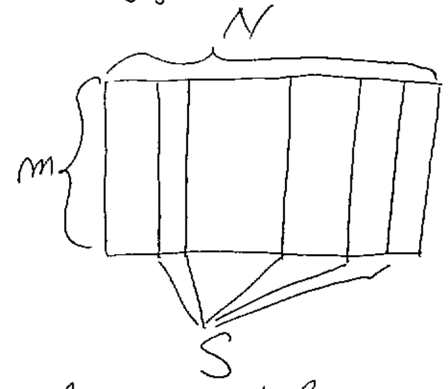
$$\min_{z \in \mathbb{R}^N} \|z\|_0 \ \text{ s.t. } \ Az = y \qquad (P_0)$$

Důkaz: $2 \Rightarrow 1$: $\underset{z \neq x}{Az = y} \Rightarrow \|z\|_0 > \|x\|_0 = s$ ... $z \notin \mathbb{R}^N_s$.

$1 \Rightarrow 2$: Nechť $Az = y$, $z \neq x$ ... $z \notin \mathbb{R}^N_s$ ... $\|z\|_0 > \|x\|_0$ ... není řešení (P_0).

Značení: 1, $A \in \mathbb{R}^{m \times N}$ matice, $S \subset \{1, \dots, N\}$

A_S je submatice A se sloupci indexovanými v S



2, x_S ... analogicky

<u>Věta</u>: Nechť $A \in \mathbb{R}^{m \times N}$ a $s \in \{1, \dots, N\}$. Pak jsou následující body ekvivalentní:

1, Každé $x \in \mathbb{R}^N_s$ je jediné řešení

$Az = Ax$ v $\mathbb{R}^N_s$ ... $Az = Ax$ & $x, z \in \mathbb{R}^N_s \Rightarrow z = x$.

2, $\ker A \cap \mathbb{R}^N_{2s} = \{0\}$

3, Pro každé $S \subset \{1, \dots, N\}$ s $\# S \leq 2s$ je zobrazení $A_S : \mathbb{R}^{\# S} \to \mathbb{R}^m$ injektivní

4, Každé $2s$ sloupců A jsou lineárně nezávislé.

Důkaz: $3 \Leftrightarrow 4$ lineární algebra

$1 \Rightarrow 2$, Nechť $u \in \ker A \cap \mathbb{R}^N_{2s}$ ... rozložíme $u = x - z$, kde $x, z \in \mathbb{R}^N_s$.

Pak $0 = Au = A(x - z) = Ax - Az$ ... tedy $Ax = Az$ ... $\Rightarrow x = z \Rightarrow u = 0$

$2 \Rightarrow 1$, Nechť $Az = Ax$ ... tedy $A(x - z) = 0$ pro $x, z \in \mathbb{R}^N_s$. Pak $u = x - z \in \ker A \cap \mathbb{R}^N_{2s}$

$\Rightarrow u = x - z = 0$..

$2 \Rightarrow 3$, Nechť 3 neplatí: $S \in \{1, \dots, N\}$ s $\# S \leq 2s$ a existuje $z \neq 0$, $z \in \mathbb{R}^{\# S}$ ... $A_S z = 0$

Pro $x \in \mathbb{R}^N$ s $x_S = z$ a nula jinde je $Ax = A_S z = 0$ a $x \in \ker A \cap \mathbb{R}^N_{2s}$.

$3 \Rightarrow 2$, Nechť 2 neplatí: $\exists x \in \mathbb{R}^N_{2s} : Ax = 0, x \neq 0$ ... $S := \mathrm{supp}(x)$ ... $\# S \leq 2s$

& $A_S x_S = Ax = 0$ ↯

Cor.: Jestliže A řeší Problém, pak $m \geq 2s$ (z (4)).

Věta: Nechť $N \geq 2s = m$, pak existuje $A \in \mathbb{R}^{m \times N}$ taková, že každé $x \in \mathbb{R}^N_{2s}$ lze zrekonstruovat z $y = Ax \in \mathbb{R}^m$

Důkaz: Buďiž $0 < t_1 < \dots < t_N$ a $A = (a_{ij}) = (t_j^i)_{\substack{i=0,\dots,m-1 \\ j=1,\dots,N}}$

Nechť $S = \{j_1, \dots, j_m\}$ s $j_1 < j_2 < \dots < j_m$

Pak $A_S = (t_j^i)_{\substack{i=0,\dots,m-1 \\ j=j_1,\dots,j_m}}$ je $m \times m$ Vandermond matrix,

$$\det A_S = \prod_{1 \leq k < l \leq m} (t_{j_k} - t_{j_m}) > 0 \quad \dots A_S \text{ je injektivní!}$$

Pozn.: • mnoho jiných matic vyhovuje
• Pronyho metoda - konstruktivní, měření jsou Fourierovy koef. x,
• Nestabilní!

1.3. Komplexita ℓ_0-minimalizace

$$x \in \mathbb{R}^N_s, \; y = Ax$$

$$\text{minimize } \|z\|_0, \text{ s.t. } Az = y \qquad (P_0)$$

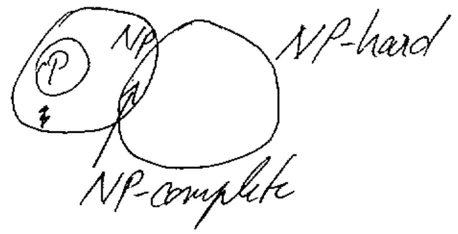
"Naivní" postup: Vyřešit všechny systémy $A_S u = y$ pro $\#S = 1$ ... pokud řešení neexistuje, pak pro všechny $\#S = 2, \dots$ až po $\#S = s$.
$\Rightarrow \binom{N}{s}$ systémů ....

Na druhou stranu, je-li řešení navrženo, lze rychle ověřit, zda opravdu $\#\operatorname{supp}(x) \leq s$ & $Ax = y$?

Třídy komplexity:

- P: problémy, u kterých existuje algoritmus, který najde řešení v polynomiálním čase (v délce vstupu).
- NP: problémy, u kterých lze ověřit správnost potenciálního řešení v polynomiálním čase
- NP-hard: problémy, u kterých lze každý řešící algoritmus transformovat (v polynomiálním čase) na algoritmus pro každý jiný NP-problém
- NP-complete = NP ∩ NP-hard

$\boxed{P = NP?}$



Příklad NP-úplného problému: 3cover problem

Vstup: $\{C_1, \ldots, C_N\}$ podmnožiny $\{1, \ldots, m\}$ s $\# C_i = 3$ pro $i = 1, \ldots, N$.

Decision problem: Existuje podsystém $\{C_j, j \in J\}$ s

1, $\bigcup_{j \in J} C_j = \{1, \ldots, m\}$

2, $C_i \cap C_j = \emptyset$ pro $i, j \in J, i \neq j$

Věta: l_0-minimalizace:

Vstup: $m \times N$ matice A, $y \in \mathbb{R}^m$

(P_0): minimize $\|z\|_0$, s.t. $Az = y$

je NP-hard.

Důkaz: Přetransformujeme řešení (P_0) na řešení 3-cover problému.

Nechť $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_N \subset \{1, \dots, m\}$, $\# \mathcal{C}_i = 3$, $N \leq \binom{m}{3}$.

$$a_{ji} = \begin{cases} 1 & \dots \ j \in \mathcal{C}_i \\ 0 & \dots \ j \notin \mathcal{C}_i \end{cases} \qquad \begin{array}{l} j = 1, \dots, m \\ i = 1, \dots, N \end{array}$$

$$\underbrace{A = (a_{ji})}_{m \times N \text{ matice}} = \begin{pmatrix} | & & | \\ a_1 & \dots & a_N \\ | & & | \end{pmatrix} \qquad a_i = (a_{1i}, \dots, a_{mi})^T \dots \text{charakteristická funkce } \mathcal{C}_i$$

$$y = (1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^m$$

Předpokládáme, že existuje alg., který umí rozhodnout, zda existuje řešení $Ax = y$ s $\|x\|_0 \leq m/3$.

Pak
- pokud existuje $\dots$ řešení 3-cover problému existuje
- pokud ne $\qquad\qquad\qquad\qquad \Rightarrow$ neexistuje

1, $y = Az = \sum_{j=1}^{N} z_j a_j \quad \dots \quad m = \|y\|_0 = \|Az\|_0 \leq \|z\|_0 \cdot 3 \quad \dots$ tedy $\|z\|_0 \geq m/3$.

2, $\|x\|_0 = \frac{m}{3} \Leftrightarrow y = Ax = \sum_{j \in \operatorname{supp} x} x_j a_j \quad \dots \quad \mathcal{C}_j = \operatorname{supp} a_j$ jsou disjunktní a $\bigcup_{j \in \operatorname{supp} x} \mathcal{C}_j = \{1, \dots, m\}$.

$\Leftrightarrow$ řešení existuje