2. Kapitola – Basis pursuit

Cíl: Najít konvexní optimizační problém, který řeší (P_0) alespoň pro některé matice A a některé vektory $x \in \mathbb{R}^N$

Pro všechny možné vstupy není možné – NP-hard

2.1 ℓ_1-minimalizace místo ℓ_0-minimalizace

Optimalizace

$$\min_{z \in \mathbb{R}^N} F_0(z), \text{ s.t. } F_i(z) \leq b_i, \ i = 1, \dots, n \qquad (P)$$

$F_0 : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ .... "objective" function

$F_i : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ --- "constraint" function

Notace: $x^{\#} = \operatorname{argmin} F_0(z), \text{ s.t. } F_i(z) \leq b_i, \ i = 1, \dots, m.$

Podmínky identity $G_i(z) = c_i$ lze nahradit $G_i(z) \leq c_i$ a $G_i(z) \geq c_i$.

(P) je konvexní, pokud $F_0, F_1, \dots, F_N$ jsou konvexní

(P) je lineární, pokud $F_0, F_1, \dots, F_N$ jsou lineární (=> simplex algorithm)

(P_0) není konvexní ... $F_0(z) = \|z\|_0$ není konvexní ... $F_0\left(\frac{e_1 + e_2}{2}\right) = 2 \leq 1 = \frac{F_0(e_1) + F_0(e_2)}{2}$

Uvažujeme

$$(P_q): \quad \operatorname{argmin} \|z\|_q \text{ s.t. } Az = y$$

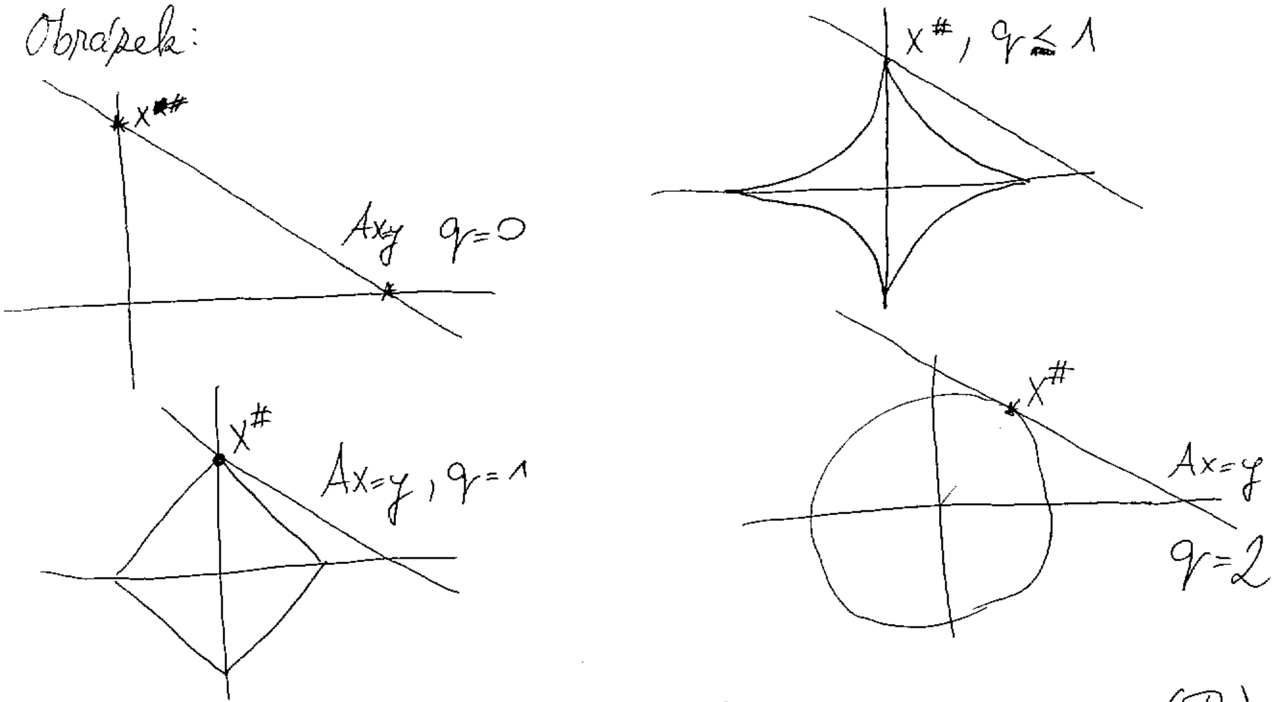
- $0 < q < 1$ ... not convex
  ... také NP-hard

- $q \geq 1$ --- konvexní

- $q > 1$ … ani kanonické vektory typicky nejsou řešením (P_q)

$\boxed{q = 1}$ konvexní, řešení jsou sparse

Obrázek:



Budeme studovat vlastnosti ℓ_1-minimalizace a (P_1).

(P_1) …. <u>Basis pursuit</u>

Věta: Nechť $A \in \mathbb{R}^{m \times N}$ se sloupci $a_1, \dots, a_N$. Pokud existuje jediné řešení $x^{\#} = \operatorname{argmin} \|z\|_1$ s.t. $Ax = y$ (P_1),

pak $\{a_j\}_{j \in \operatorname{supp}(x^{\#})}$ jsou lin. nezávislé. Tedy $\|x^{\#}\|_0 = \# \operatorname{supp}(x^{\#}) \leq m$.

Důkaz: Poslední část plyne z $\operatorname{rank}(A) \leq m$.

Nechť $\{a_j\}_{j \in S}$, $S := \operatorname{supp} x^{\#}$ nejsou lin. nezávislé.

Pak $\exists v \in \mathbb{R}^N$, $v \neq 0$, $\operatorname{supp} v \subset S$, takže

$$0 = \sum_{j \in S} v_j a_j = \sum_{j=1}^{N} v_j a_j = Av$$

. Pro $t \neq 0$ dostaneme

$$\|x^\#\|_1 < \|x^\# + tv\|_1 = \sum_{j\in S}' |x_j^\# + tv_j| = \sum_{j\in S}' \operatorname{sgn}(x_j^\# + tv_j)(x_j^\# + tv_j)$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{pro } t \text{ malé}}}{=} \sum_{j\in S}' \operatorname{sgn}(x_j^\#)(x_j^\# + tv_j) = \sum_{j\in S}' \operatorname{sgn}(x_j^\#)(x_j^\#) + t\sum_{j\in S}' \operatorname{sgn}(x_j^\#)\cdot v_j$$

$$= \|x^\#\|_1 + t\sum_{j\in S}' \operatorname{sgn}(x_j^\#)\cdot v_j \qquad \dots \lightning$$

V našem (tj. reálném) případě lze (P_1) redukovat na lineární program.

$\min \|z\|_1$, s.t. $Az = y$ (P_1)

$$z_j^+ = \begin{cases} z_j, & z_j \geq 0 \\ 0, & z_j < 0 \end{cases} \qquad z_j^- = \begin{cases} 0, & z_j \geq 0 \\ -z_j, & z_j < 0 \end{cases} \qquad \dots\ z = z^+ - z^-$$

$$\|z\|_1 = \sum_{j=1}^N (z_j^+ + z_j^-)$$

$$\min_{z^+, z^- \in \mathbb{R}^N} \sum_{j=1}^N (z_j^+ + z_j^-) \quad \text{s.t.} \quad (A, -A)\begin{pmatrix} z^+ \\ z^- \end{pmatrix} = y \ \& \ \begin{pmatrix} z^+ \\ z^- \end{pmatrix} \geq 0. \qquad (P_1')$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Minimizer } (P_1)}}{x^\#} = (x^+)^\# - (x^-)^\#$$

část. min. (P_1')

2.2. Kvadratické okrajové podmínky

zapotřebí pro
- komplexní případ
- chyby měření

$(P_{1,\eta})$: $x^\# = \operatorname{argmin} \|z\|_1$, s.t. $\|Az - y\|_2 \leq \eta$.

$\eta > 0$ … noise level

konvexní optimizační problém

Podobné problémy

(P_*): $\min\limits_{z \in \mathbb{R}^N} \lambda \|z\|_1 + \|Az - y\|_2^2$ … basis pursuit denoising
$\lambda > 0$ … parametr

(L): $\min\limits_{z \in \mathbb{R}^N} \|Az - y\|_2$, s.t. $\|z\|_1 \leq \tau$ … „LASSO" … least absolute shrinkage and selection operator
$\tau > 0$ – parametr

Věta: Nechť A je $m \times N$ matice a $y \in \mathbb{R}^m$. Pak platí:

1, Pokud je x řešením (P_*), pak existuje $\eta = \eta_x$ takové, že x minimalizuje $(P_{1,\eta})$.

2, Pokud x je řešením $(P_{1,\eta})$, tak existuje $\tau = \tau_x$ takové, že x minimalizuje (L)

3, Pokud x je řešením (L), pak existuje $\lambda = \lambda_x$ takové, že x minimalizuje (P_*).

2.3. Null Space Property

Cíl: Zajistit podmínek bude řešení (P_0) a (P_1) splývat.

Definice: Nechť $A \in \mathbb{R}^{m \times N}$.

1, Nechť $S \subset \{1, \dots, N\}$. Říkneme, že A má "Null Space Property" vzhledem k S (NSP_S), pokud platí

(*) $\|v_S\|_1 < \|v_{\{1,\dots,N\} \setminus S}\|_1$ pro všechna $v \in \ker A \setminus \{0\}$.

2, A má Null Space Property řádu $s < N$, pokud

A má (NSP_S) vzhledem ke každé $S \subset \{1, \dots, N\}$ s $\# S \leq s$. (NSP_s)

Poznámky: 1, (*) platí pro pevné $v \in \ker A \setminus \{0\}$ a všechny $S \subset \{1, \dots, N\}$ s $\# S \leq s$, právě když (*) platí pro totéž v a S množinu s největších souřadnic ~~z~~ v. .... $\{|v_j| : j \in S\} = \{v_1^*, v_2^*, \dots, v_s^*\}$.

2, Přičtene $\|v_S\|_1$ k (*) $\Rightarrow$ $2\|v_S\|_1 < \|v\|_1$ pro všechna $v \in \ker A \setminus \{0\}$.

3, Přičtení $\|v_{\{1,\dots,N\} \setminus S}\|_1$ dává $\|v\|_1 < 2\|v_{\{1,\dots,N\} \setminus S}\|_1$.

4, 1+3, dává (NSP_s) právě když $\|v\|_1 < 2\sigma_s(v)_1$ pro $v \in \ker A \setminus \{0\}$.

Věta (Rekonstrukce pomocí Basis pursuit)

Nechť $A \in \mathbb{R}^{m \times N}$, nechť $S \subset \{1, \dots, N\}$. Pak každý vektor x s $\mathrm{supp}(x) \subset S$ je jediné řešení (P_1) s $y = Ax$, právě když A má (NSP_S).

Dále je každé s-sparse $x \in \mathbb{R}^N$ jediným řešením (P_1) s $y = Ax$, právě když A má (NSP_s).

Důkaz: "$\Rightarrow$": Předpokládáme, že každé $x \in \mathbb{R}^N$ s $\mathrm{supp}(x) \subset S$ je jediné řešení

$$x = \arg\min \|z\|_1, \text{ s.t. } Az = Ax.$$

Nechť $v \in \ker A \setminus \{0\}$. Pak v_S je jediné řešení

$$v_S = \operatorname*{argmin}_{z \in \mathbb{R}^N} \|z\|_1, \text{ s.t. } Az = Av_S$$

Protože $A(-v_{\{1,\dots,N\}\setminus S}) = A(v - v_{\{1,\dots,N\}\setminus S}) = A(v_S)$ a $-v_{\{1,\dots,N\}\setminus S} \neq v_S$,

máme $\|v_{\{1,\dots,N\}\setminus S}\|_1 < \|v_S\|_1 \Rightarrow (NSP_S)$.

"$\Leftarrow$": Nechť A má (NSP_S) a nechť $x \in \mathbb{R}^N$ se $\operatorname{supp} x \subset S$.

A nechť $z \in \mathbb{R}^N$ s $Az = Ax$ a $z \neq x$. Musíme dokázat, že $\|z\|_1 > \|x\|_1$.

Položme $v = x - z$. Pak $v \in \ker A \setminus \{0\}$ a tedy

$$\|x\|_1 \leq \|x - z_S\|_1 + \|z_S\|_1 = \|v_S\|_1 + \|z_S\|_1$$

$$< \|v_{\{1,\dots,N\}\setminus S}\|_1 + \|z_S\|_1 = \|z_{\{1,\dots,N\}\setminus S}\|_1 + \|z_S\|_1 = \|z\|_1.$$

Poznámka: 1, Pro některá A, x je možné vyřešit (P_0) efektivně – pomocí (P_1).

2, Pokud A má (NSP_s) tak ji má i $\hat{A} = GA$, kde G je regulární $m \times m$ matice G. Totéž platí o matici

$$\tilde{A} = \left[\frac{A}{B}\right], B \in \mathbb{R}^{m' \times N}$$

... lineární transformace měření a přidání měření nemění rekonstruovatelnost.

2.4 Stabilita

Rekonstrukce komprimovatelných vektorů?!

Cíl: Basis pursuit je stabilní, pokud (NSP$_s$) mírně zesílíme.

Definice: Nechť $A \in \mathbb{R}^{m \times N}$ a $0 < \rho < 1$.

1, Nechť $S \subset \{1, \dots, N\}$. Pak A má stabilní NSP s konstantou ρ vzhledem k S, jestliže $\|v_S\|_1 \le \rho \|v_{\{1,\dots,N\}\setminus S}\|_1$ pro všechna $v \in \ker A$. $\quad SNSP_S^\rho$

2, Nechť $s \in \{1, \dots, N\}$. Pak A má stabilní NSP řádu s s konstantou ρ, jestliže A má $SNSP_S^\rho$ pro všechna $S \subset \{1, \dots, N\}$ s $\#S \le s$. $\quad \dots SNSP_s^\rho$

Věta: Nechť A je $m \times N$ matice, $0 < \rho < 1$ a $S \subset \{1, \dots, N\}$.

Pak A má $SNSP_S^\rho$, právě když

$$(*) \quad \|z - x\|_1 \le \frac{1+\rho}{1-\rho} \left(\|z\|_1 - \|x\|_1 + 2\|x_{\{1,\dots,N\}\setminus S}\|_1 \right) \text{ pro všechna } x, z \in \mathbb{R}^N \text{ s } Az = Ax$$

Tedy pokud A má $SNSP_s^\rho$ a $x^\#$ je řešení (P_1) s $y = Ax$ pro nějaké $x \in \mathbb{R}^N$, pak

$$\underbrace{\|x - x^\#\|_1}_{\text{Error of } (P_1)} \le 2 \frac{1+\rho}{1-\rho} \underbrace{\sigma_s(x)_1}_{\text{Defekt } s\text{-sparsity}}.$$

Důkaz ... Tedy: Nechť $S \subset \{1, \dots, N\}$ je taková, že $\sigma_s(x)_1 = \|x_{\{1,\dots,N\}\setminus S}\|_1$

Nechť $z = x^*$, pak $Az = Ax$, $\|x^\#\|_1 \le \|x\|_1$ a z $(*)$

$$\|x^\# - x\|_1 \le \frac{1+\rho}{1-\rho} \left(\|x^\#\|_1 - \|x\|_1 + 2\sigma_s(x)_1 \right) \le 2 \frac{1+\rho}{1-\rho} \sigma_s(x)_1.$$

K důkazu $(*)$: Lemma: $S \subset \{1, \dots, N\}$, $x, z \in \mathbb{R}^N$. Pak platí

$$\|(x-z)_{\{1,\dots,N\}\setminus S}\|_1 \le \|z\|_1 - \|x\|_1 + \|(x-z)_S\|_1 + 2\|x_{\{1,\dots,N\}\setminus S}\|_1$$

Důkaz lemmatu:

$$\|x\|_1 = \|x_{\{1,\dots,N\}\setminus S}\|_1 + \|x_S\|_1 \le \|x_{\{1,\dots,N\}\setminus S}\|_1 + \|(x-z)_S\|_1 + \|z_S\|_1$$

$$\|(x-z)_{\{1,\dots,N\}\setminus S}\|_1 \le \|x_{\{1,\dots,N\}\setminus S}\|_1 + \|z_{\{1,\dots,N\}\setminus S}\|_1$$

Sečíst: $$\|(x-z)_{\{1,\dots,N\}\setminus S}\|_1 \le 2\|x_{\{1,\dots,N\}\setminus S}\|_1 + \underbrace{\|z_{\{1,\dots,N\}\setminus S}\|_1 + \|z_S\|_1}_{\|z\|_1} + \|(x-z)_S\|_1 - \|x\|_1$$

Důkaz $(*) \Rightarrow SNSP_S^{\rho}$:

Nechť $v \in \ker A$ ... chceme $\|v_S\|_1 \le \rho \|v_{\{1,\dots,N\}\setminus S}\|_1$

$$A(v_{\{1,\dots,N\}}) = A(v_S) \overset{(*)}{\Longrightarrow}$$

$$\|v\|_1 \le \frac{1+\rho}{1-\rho}\left(\|v_{\{1,\dots,N\}\setminus S}\|_1 - \|v_S\|_1\right)$$

$$\Rightarrow (1-\rho)\{\|v_S\|_1 + \|v_{\{1,\dots,N\}\setminus S}\|_1) \le (1+\rho)(\|v_{\{1,\dots,N\}\setminus S}\|_1 - \|v_S\|_1) \ \dots$$

$SNSP_S^{\rho} \Rightarrow (*)$:

Nechť $x, z \in \mathbb{R}^N$, $Az = Ax$. Pak $v = z - x \in \ker A$ a $SNSP_S^{\rho}$:

$$\|v_S\|_1 \le \rho \|v_{\{1,\dots,N\}\setminus S}\|_1$$

Lemma $\Rightarrow$ $$\|v_{\{1,\dots,N\}\setminus S}\|_1 \le \|z\|_1 - \|x\|_1 + \|v_S\|_1 + 2\|x_{\{1,\dots,N\}\setminus S}\|_1$$

$$\le \|z\|_1 - \|x\|_1 + \rho\|v_{\{1,\dots,N\}\setminus S}\|_1 + 2\|x_{\{1,\dots,N\}\setminus S}\|_1$$

$$\Rightarrow \|v_{\{1,\dots,N\}\setminus S}\|_1 \le \frac{1}{1-\rho}\left(\|z\|_1 - \|x\|_1 + 2\|x_{\{1,\dots,N\}\setminus S}\|_1\right)$$

$$\Rightarrow \|v\|_1 = \|v_S\|_1 + \|v_{\{1,\dots,N\}\setminus S}\|_1 \le (1+\rho)\|v_{\{1,\dots,N\}\setminus S}\|_1$$

$$\le \frac{1+\rho}{1-\rho}\left(\|z\|_1 - \|x\|_1 + 2\|x_{\{1,\dots,N\}\setminus S}\|_1\right)_{\equiv(*)}.$$

2.5. Robustnost

Nepřesná měření?

$y \neq Ax$, wybrž $\|Ax-y\|_2 \leq \eta$

Cíl: Basis pursuit je robustní vzhledem k šumu.

$(P_{1,\eta})$ $\quad x^{\#} = \underset{z \in \mathbb{R}^N}{\operatorname{argmin}} \|z\|_1$, s.t. $\|Az-y\|_2 \leq \eta$

Definice: $A \in \mathbb{R}^{m \times N}$, $0 < \rho < 1$, $\tau > 0$

1, $S \subset \{1, \dots, N\}$. Pak A má robustní NSP s konstantami $\rho, \tau > 0$ vzhledem k S, pokud
$$\|v_S\|_1 \leq \rho \|v_{\{1,\dots,N\}\setminus S}\|_1 + \tau \|Av\|_2 \quad \text{pro } v \in \mathbb{R}^N!$$
$RNSP_S^{\rho,\tau}$

2, Řádu s ... $\forall \# S \leq s$

Věta: $A \in \mathbb{R}^{m \times N}$, $0 < \rho < 1$, $\tau > 0$, $S \subset \{1, \dots, N\}$.

Pak A má $RNSP_S^{\rho,\tau} \iff$
$$(*) \quad \|z-x\|_1 \leq \frac{1+\rho}{1-\rho}\left(\|z\|_1 - \|x\|_1 + 2\|x_{\{1,\dots,N\}\setminus S}\|_1\right) + \frac{2\tau}{1-\rho}\|A(z-x)\|_2 \quad \forall x, t \in \mathbb{R}^N$$

Tedy: Má-li A $RNSP_s^{\rho,\tau}$ a je-li $x^{\#}$ řešení $(P_{1,\eta})$ $\quad$ (nejjednodušší!)

s $y = Ax + e$, $\|e\|_2 \leq \eta$, pak platí
$$\|x - x^{\#}\|_1 \leq 2 \cdot \frac{1+\rho}{1-\rho}\sigma_s(x)_1 + \frac{4\tau}{1-\rho}\eta.$$

Důkaz vynechám ...