3. Kapitola: RIP

Cíl: Snadno ověřitelná vlastnost matice A, která zaručí NSP (a její varianty), a tedy i rekonstrukci sparse vektorů z měření $y = Ax (+e)$ pomocí basis pursuit.

3.1. Koherence

$$\mu := \mu(A) = \max_{1 \le i < j \le N} |\langle a_i, a_j \rangle|, \text{ kde } A = (a_1 \dots a_N), \ \|a_i\|_2 = 1, \ i = 1, \dots, N.$$

koherence matice A

$$\mu_1(s) = \max_{i \in \{1,\dots,N\}} \ \max_{\substack{S \subset \{1,\dots,N\} \setminus \{i\} \\ \#S \le s}} \sum_{j \in S} |\langle a_i, a_j \rangle|$$

ℓ_1-koherence matice A

$\mu(A) = \mu_1(1)$

Věta: Nechť $A \in \mathbb{R}^{m \times N}$ s normovanými sloupci $a_1, \dots, a_N \in \mathbb{R}^m$. Pokud $\mu_1(s) + \mu_1(s-1) < 1$, pak lze každý s-sparse vektor $x \in \mathbb{R}^N$ zrekonstruovat z $y = Ax$ pomocí basis pursuit. $\dots \ m \ge Cs^2$

$N = m^k, C = C(k)$

3.2. RIP... Restricted Isometry Property

Definice: $A \in \mathbb{R}^{m \times N}$, $s \in \{1, \dots, N\}$. Pak RIP-konstanta $\delta_s = \delta_s(A)$ řádu s je nejmenší $\delta \ge 0$ taková, že

$$(1-\delta)\|x\|_2^2 \le \|Ax\|_2^2 \le (1+\delta)\|x\|_2^2 \qquad (*)$$

pro $\forall x \in \cancel{\Sigma_s} \ \mathbb{R}^N_s$

Poznámka: (*) je ekvivalentní s

$$\left| \|A_S x\|_2^2 - \|x\|_2^2 \right| \leq \delta \|x\|_2^2$$

pro všechny $S \subset \{1, \dots, N\}$, $\#S \leq s$ a pro všechna $x \in \mathbb{R}^N$ s $\mathrm{supp}(x) \subset S$.

Pro taková x je

$$\|A_S x\|_2^2 - \|x\|_2^2 = \langle A_S x, A_S x \rangle - \langle x, x \rangle = \langle \underbrace{A_S^* A_S}_{\in \mathbb{R}^{N \times N}} x, x \rangle - \langle \underbrace{I_S}_{\in \mathbb{R}^{N \times N}} x, x \rangle$$

$$= \langle (A_S^* A_S - I_S) x, x \rangle$$

Tedy $\dfrac{\left| \|A_S x\|_2^2 - \|x\|_2^2 \right|}{\|x\|_2^2} = \dfrac{|\langle (A_S^* A_S - I_S) x, x \rangle|}{\|x\|_2^2}$ pro $x \neq 0$ s $\mathrm{supp}(x) \subset S$.

$\Rightarrow \delta_s(A) = \max\limits_{\substack{S \subset \{1, \dots, N\} \\ \#S \leq s}} \|A_S^* A_S - I_S\|_{2 \to 2}$, protože $A_S^* A_S - I_S$ je hermitovská!

Věta: Nechť $A \in \mathbb{R}^{m \times N}$ a $s \leq N/2$ s $\delta_{2s} < 1/3$.

Pak každý s-sparse vektor $x \in \mathbb{R}_s^N$ může být rekonstruován z $y = Ax$ pomocí basis pursuit.

Důkaz: Ukážeme, že pak A má (NSP$_s$), tedy že

$$\|v_S\|_1 < \|v_{\{1, \dots, N\} \setminus S}\|_1 \quad \dots \quad \Leftrightarrow \|v_S\|_1 < \tfrac{1}{2} \|v\|_1$$

pro $v \in \ker A \setminus \{0\}$ a $\#S \leq s$. ... stačí $\#S = s$.

Ukážeme, že

$$\|v_S\|_2 \le \frac{\delta_{2s}}{1-\delta_s} \cdot \frac{1}{\sqrt{s}} \cdot \|v\|_1$$

Pro $\delta_s \le \delta_{2s} < 1/3$ ... $< \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{s}} \|v\|_1$

a $\|v_S\|_1 \le \sqrt{s} \|v_S\|_2$ uzavře důkaz.

A konečně stačí, budeme-li uvažovat S jako množinu ~~~~ s největších souřadnic koeficientů v.

Tedy předpokládejme, že $|v_1| \ge |v_2| \ge \dots \ge |v_s| \ge |v_{s+1}| \ge \dots \ge |v_N| \ge 0$

Položme $S_0 = S = \{1, \dots, s\}$

$S_1 = \{s+1, \dots, 2s\}$

$S_2 = \{2s+1, \dots, 3s\}$ a.t.d.

Díky $Av = 0$ máme

$$A v_{S_0} = A(-v_{S_1} - v_{S_2} - \dots)$$

a tedy $$\|v_{S_0}\|_2^2 \le \frac{\|A v_{S_0}\|_2^2}{1-\delta_s} = \frac{1}{1-\delta_s} \langle A v_{S_0}, A(-v_{S_1}) + A(-v_{S_2}) + \dots \rangle$$

$$= \frac{1}{1-\delta_s} \sum_{k \ge 1} \langle A v_{S_0}, A(-v_{S_k}) \rangle$$

Úvaha: Nechť $x, z \in \mathbb{R}^N_s$ s disjunktními nosiči a $\|x\|_2 = \|z\|_2 = 1$.

Pak $\|x \pm z\|_2^2 = 2$ a $x \pm z \in \mathbb{R}^N_{2s}$. Tedy

$$2(1-\delta_{2s}) \leq \|A(x \pm z)\|_2^2 \leq 2(1+\delta_{2s})$$

a $$|\langle Ax, Az\rangle| = \frac{1}{4}\left|\|Ax+Az\|_2^2 - \|Ax-Az\|_2^2\right| \leq \delta_{2s}.$$

Obecně pro nenormované x, z: $|\langle Ax, Az\rangle| \leq \delta_{2s}\|x\|_2 \cdot \|z\|_2$.

Tedy $$|\langle Av_{S_0}, A(-v_{S_k})\rangle| \leq \delta_{2s}\|v_{S_0}\|_2 \cdot \|v_{S_k}\|_2$$

a $$\|v_{S_0}\|_2^2 \leq \frac{1}{1-\delta_s} \cdot \sum_{k \geq 1} \delta_{2s} \cdot \|v_{S_0}\|_2 \cdot \|v_{S_k}\|_2$$

$$\Rightarrow \|v_{S_0}\|_2 \leq \frac{\delta_{2s}}{1-\delta_s} \sum_{k \geq 1} \|v_{S_k}\|_2$$

Buď $i \in S_{k-1}$, $j \in S_k$ ... pak $|v_i| \geq |v_j|$

a $$\|v_{S_k}\|_2 = \left(\sum_{j \in S_k} |v_j|^2\right)^{1/2} \leq \left(s \cdot \min_{i \in S_{k-1}} |v_i|^2\right)^{1/2}$$

$$= \sqrt{s} \cdot \min_{i \in S_{k-1}} |v_i| \leq \frac{\sqrt{s}}{s} \cdot \sum_{i \in S_{k-1}} |v_i|$$

Tedy konečně

$$\|v_{S_0}\|_2 \leq \frac{\delta_{2s}}{1-\delta_s} \sum_{k \geq 1} \frac{1}{\sqrt{s}} \|v_{S_{k-1}}\|_1 = \frac{\delta_{2s}}{1-\delta_s} \cdot \frac{1}{\sqrt{s}} \cdot \|v\|_1 \qquad \blacksquare$$

. Stabilita & Robustnost

- Konstanta $1/3$ není optimální (lze zvětšit)
- RIP implikuje i zobecněné NSP_s $\Rightarrow$ stabilita a robustnost (P_1).

Výsledek: Nechť $A \in \mathbb{R}^{m \times N}$ s $\delta_{2s} < \delta_* \approx 0.49\ldots$

Pak pro každé $x \in \mathbb{R}^N$ a každé $y \in \mathbb{R}^m$ s $\|Ax-y\|_2 \leq \eta$

a každé řešení $x^\#$

$$x^\# = \operatorname*{argmin}_{z \in \mathbb{R}^N} \|z\|_1, \text{ s.t. } \|Az-y\|_2 \leq \eta \qquad (P_{1,\eta})$$

platí $\|x-x^\#\|_1 \leq C\sigma_s(x)_1 + D\sqrt{s}\,\eta$

a $\|x-x^\#\|_2 \leq \frac{C}{\sqrt{s}}\sigma_s(x)_1 + D\eta$,

kde konstanty C, D závisí jen na δ_{2s}.

Poznámky: 1, RIP ... zavedeny již v Candès & Tao (2006)

2, Těžký $\delta_{2s} + \delta_{3s} < 1$ ... později vylepšeno na $\delta_{2s} < 0.49\ldots$

3, existují matice s $\delta_{2s} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$, pro které rekonstrukce selže.

4, Příští kapitola ... náhodné matice s $\delta_s \leq \delta$

a $m \geq C\delta^{-2} s \left(\log\frac{N}{s} + 1\right)$.

5, Známé deterministické matice typicky mnohem horší!