4. RIP pro náhodné matice

Cíl: Dokázat, že náhodné matice splňují RIP s malými konstantami při malém m s velkou pravděpodobností

4.1. Náhodné proměnné

- $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ – pravděpodobnostní prostor

  Ω … množina

  Σ … σ-algebra

  $\mathbb{P}$ … pravděpodobnostní míra na (Ω, Σ)

- $B \in \Omega$ … události (events)

- $\mathbb{P}(B) = \int_B 1 \, d\mathbb{P} = \int_\Omega \chi_B(\omega) \, d\mathbb{P}(\omega)$

- Náhodná proměnná: $X : \Omega \to \mathbb{R}$, měřitelná

  $$\mu = \mathbb{E}X = \int_\Omega X(\omega) \, d\mathbb{P}(\omega)$$

  … střední hodnota

  $$\sigma^2 = \mathbb{E}(X-\mu)^2 = \mathbb{E}(X^2 - 2\mu X + \mu^2) = \mathbb{E}(X^2) - \mu^2 = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2$$

  … variance … rozptyl

· Markovova nerovnost:

$$\mathbb{P}(|X| \geq t) = \int_{\{\omega : |X(\omega)| \geq t\}} 1 \, d\mathbb{P}(\omega) \leq \int_{\{\omega : |X(\omega)| \geq t\}} \frac{|X(\omega)|}{t} \, d\mathbb{P}(\omega)$$

$$\leq \frac{1}{t} \int_{\Omega} |X(\omega)| \, d\mathbb{P}(\omega) = \frac{\mathbb{E}|X|}{t}, \quad t > 0$$

Náhodná proměnná je „normální" (nebo Gaussovská), pokud má hustotu (density)

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad t \in \mathbb{R},$$

tedy $\mathbb{P}(a < X \leq b) = \int_a^b f(t)\,dt$

... střední hodnota μ, rozptyl σ^2 $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

standardní normální proměnná: $\sigma = 1, \mu = 0$ – $\mathcal{N}(0;1)$

$X_1, \dots, X_N$ jsou nezávislé, pokud pro všechna $t_1, \dots, t_N \in \mathbb{R}$:

$$\mathbb{P}(X_1 \leq t_1, \dots, X_N \leq t_N) = \prod_{j=1}^{N} \mathbb{P}(X_j \leq t_j)$$

$\Rightarrow$ & $\mathbb{E}\left[\prod_{j=1}^{N} X_j\right] = \prod_{j=1}^{N} \mathbb{E}X_j$.

N nezávislých Gaussovských proměnných

$\Omega = \mathbb{R}^N$, Σ ... Lebesgueovsky měřitelné podmnožiny $\mathbb{R}^N$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$$

$$\mathbb{P}(B) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} \chi_B(t_1, \dots, t_N)\, e^{-t_1^2/2} \cdots e^{-t_N^2/2}\, d(t_1, \dots, t_N)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_B e^{-\|t\|_2^2/2}\, dt$$

$X_i(t) = t_i$, $i = 1, \dots, N$.   i.i.d. independent identically distributed

4.2 Koncentrační nerovnosti

Lemma: 1, Nechť ω je standardní normální proměnná.

Pak $\mathbb{E}(e^{\lambda \omega^2}) = \dfrac{1}{\sqrt{1-2\lambda}}$ pro $-\infty < \lambda < 1/2$.

2, (2-stabilita normálního rozdělení)

Nechť $m \in \mathbb{N}$, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$ a nechť $\omega_1, \dots, \omega_m$ jsou i.i.d. standardní normální proměnné.

Pak $\lambda_1 \omega_1 + \dots + \lambda_m \omega_m \sim \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i^2\right)^{1/2} \cdot \mathcal{N}(0,1)$.

je tedy stejně rozdělená jako násobek std. normální proměnné.

Důkaz: 1, Substituce $s := \sqrt{1-2\lambda}\, t$

$$\mathbb{E}(e^{\lambda \omega^2}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda t^2} e^{-t^2/2}\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(\lambda - 1/2) t^2}\, dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2/2} \frac{ds}{\sqrt{1-2\lambda}} = \frac{1}{\sqrt{1-2\lambda}}.$$

2) Stačí dokázat pro $m=2$, dále indukcí.

Nechť $m=2$, $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2)\neq 0$, ω_1,ω_2 i.i.d. standardní normální.

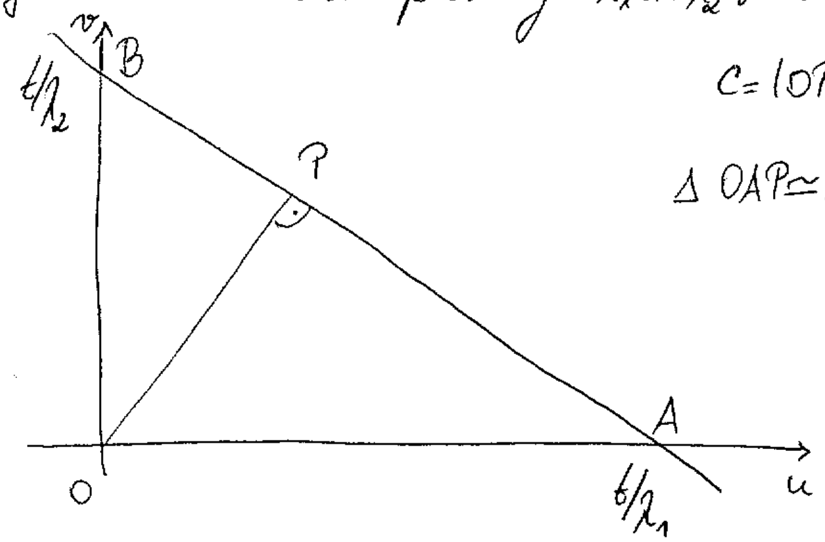
Položme $S := \lambda_1\omega_1+\lambda_2\omega_2$

$t\geq 0$

Pak $$\mathbb{P}(S\leq t)=\frac{1}{2\pi}\int_{(u,v):\lambda_1 u+\lambda_2 v\leq t} e^{-(u^2+v^2)/2}\,d(u,v)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{(u,v):u\leq c} e^{-(u^2+v^2)/2}\,du\,dv=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{u\leq c} e^{-u^2/2}\,du$$

Použili jsme rotační invarianci $(u,v)\to e^{-(u^2+v^2)/2}$ a $c>0$ je vzdálenost O od přímky $\lambda_1 u+\lambda_2 v=t$



$$c=|OP|=|OB|\cdot\frac{|OA|}{|BA|}=\frac{t}{\lambda_2}\cdot\frac{t/\lambda_1}{\sqrt{\frac{t^2}{\lambda_2^2}+\frac{t^2}{\lambda_1^2}}}$$

$\triangle OAP \simeq \triangle BAO$

$$=\frac{t}{\lambda_1\lambda_2\sqrt{\frac{1}{\lambda_2^2}+\frac{1}{\lambda_1^2}}}$$

$$=\frac{t}{\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2}}$$

$$\underline{\mathbb{P}}(S\leq t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{u:u\leq \frac{t}{\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2}}} e^{-u^2/2}\,du=\mathbb{P}\left(\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2}\,\omega\leq t\right)$$

Pokud $\omega_1, \dots, \omega_m$ jsou (izávislé) standardní normální proměnné, pak je $\mathbb{E}(\omega_1^2 + \dots + \omega_m^2) = m$. Pokud jsou navíc nezávislé, tak se hodnota $\omega_1^2 + \dots + \omega_m^2$ koncentruje silně okolo m.

$\Rightarrow$ Concentration of measure

Lemma: Nechť $m \in \mathbb{N}$ a nechť $\omega_1, \dots, \omega_m$ jsou i.i.d. standardní normální proměnné a nechť $0 < \varepsilon < 1$. Pak

$$\mathbb{P}(\omega_1^2 + \dots + \omega_m^2 \geq (1+\varepsilon)m) \leq e^{-\frac{m}{2}[\varepsilon^2/2 - \varepsilon^3/3]}$$

a

$$\mathbb{P}(\omega_1^2 + \dots + \omega_m^2 \leq (1-\varepsilon)m) \leq e^{-\frac{m}{2}[\varepsilon^2/2 - \varepsilon^3/3]}$$

Důkaz: Dokážeme první nerovnost, druhá je podobná. $\beta := 1+\varepsilon$

$$\mathbb{P}(\omega_1^2 + \dots + \omega_m^2 \geq \beta m) = \mathbb{P}(\omega_1^2 + \dots + \omega_m^2 - \beta m \geq 0)$$

$$= \mathbb{P}(\lambda(\omega_1^2 + \dots + \omega_m^2 - \beta m) \geq 0) = \mathbb{P}(\exp(\lambda(\omega_1^2 + \dots + \omega_m^2 - \beta m)) \geq 1)$$

$$\leq \mathbb{E}\exp(\lambda(\omega_1^2 + \dots + \omega_m^2 - \beta m)), \quad \lambda > 0 \text{ je parametr}$$

Dále $\mathbb{E}\exp(\lambda(\omega_1^2 + \dots + \omega_m^2 - \beta m)) = e^{-\lambda\beta m}\,\mathbb{E}\, e^{\lambda\omega_1^2} \dots e^{\lambda\omega_m^2}$

$$= e^{-\lambda\beta m} \cdot (\mathbb{E} e^{\lambda\omega_1^2})^m = e^{-\lambda\beta m} \cdot (1-2\lambda)^{-1/2 \cdot m}, \quad 0 < \lambda < 1/2.$$

Chceme minimizovat přes $0<\lambda<1/2$:

$$\cancel{e^{-\lambda\beta m}}\cdot(-\beta m)\cdot(1-2\lambda)^{-m/2}+\cancel{e^{-\lambda\beta m}}(1-2\lambda)^{-\frac{m}{2}-1}\cdot\left(\cancel{*}\frac{m}{\cancel{2}}\right)\cdot(\cancel{*2})=0$$

$$-\beta + (1-2\lambda)^{-1} = 0$$

$$\frac{1}{1-2\lambda}=\beta \quad\dots\quad \frac{1}{\beta}=1-2\lambda \quad\dots\quad 2\lambda = 1-\frac{1}{\beta} \quad \begin{matrix} <1 \\ >0 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow 0<\lambda<1/2$$

a $\mathbb{P}(\omega_1^2+\dots+\omega_m^2 \geq \beta m)$

$$\leq e^{-\beta m\cdot\left(\frac{1-1/\beta}{2}\right)}\cdot\beta^{m/2}$$

$$= e^{-\frac{\beta-1}{2}m}\cdot\beta^{m/2} = e^{-\frac{\varepsilon m}{2}} e^{\frac{m}{2}\ln(1+\varepsilon)}$$

užitím $\ln(1+t)\leq t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}$, $-1<t<1$

$$\Rightarrow \leq e^{-\frac{\varepsilon m}{2}} e^{\frac{m}{2}\left[\varepsilon-\frac{\varepsilon^2}{2}+\frac{\varepsilon^3}{3}\right]}$$ $\blacksquare$

Věta: Nechť $A=\frac{1}{\sqrt{m}}\begin{pmatrix}\omega_{1,1} & \dots & \omega_{1,N}\\ \vdots & & \vdots \\ \omega_{m,1} & \dots & \omega_{m,N}\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times N}$, ω_{ij} ... i.i.d. stand. normální

Nechť $x\in\mathbb{R}^N$ s $\|x\|_2=1$. Pak

$$\mathbb{P}\left(\left|\|Ax\|_2^2-1\right|\geq t\right)\leq 2e^{-\frac{m}{2}\left[t^2/2-t^3/3\right]}\leq 2e^{-Cmt^2}$$ pro $0<t<1$ a nějaké $C>0$.

Důkaz: $x=(x_1,\dots,x_N)^T$. Užijeme 2-stabilitu norm. rozdělení

$$\mathbb{P}\left(\left|\|Ax\|_2^2-1\right|\geq t\right)=\mathbb{P}\left(\left|(\omega_{1,1}x_1+\dots+\omega_{1N}x_N)^2+\dots+(\omega_{m1}x_1+\dots+\omega_{mN}x_N)^2-m\right|\geq tm\right)$$

$$=\mathbb{P}\left(\left|\omega_1^2+\dots+\omega_m^2-m\right|\geq mt\right)\leq$$

$$=\mathbb{P}\left(\omega_1^2+\dots+\omega_m^2\geq(1+t)m\right)+\mathbb{P}\left(\omega_1^2+\dots+\omega_m^2\leq(1-t)m\right)$$

$$\leq 2e^{-\frac{m}{2}\left[t^2/2-t^3/3\right]}.$$

Druhá nerovnost je jednoduchá ($C=1/12$).

Poznámka: 1, Pro $x\in\mathbb{R}^N$ bez $\|x\|_2=1$ lze škálováním snadno

zapsat $$\mathbb{P}\left(\left|\|Ax\|_2^2-\|x\|_2^2\right|\geq t\|x\|_2^2\right)\leq 2e^{-Cmt^2},\ x\in\mathbb{R}^N.$$

2, Tradiční důkaz je založen na rotační invarianci distribuce normálního rozdělení, a stačí tedy dokázat danou nerovnost pro jedno $x\in\mathbb{R}^N$ s $\|x\|_2=1$. Vezmeme-li $x=e_1$, lze použít koncentrační lemma přímo, bez užití 2-stability.

4.3. RIP pro Gaussovské náhodné matice

Cíl: Ukázat, že Gaussovská náhodná matice splňuje RIP s velkou pravděpodobností.

Metoda: Rozšíříme koncentrační nerovnost nejprve na síť bodů v $\mathbb{R}^N_s \cap \mathbb{S}^{N-1}$ a pak (ze spojitosti) na celé $\mathbb{R}^N_s$.

Lemma: Nechť $t>0$. Pak existuje množina $\mathcal{N} \subset \mathbb{S}^{d-1} = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\|_2 = 1\}$ s

i) $|\mathcal{N}| \le (1+2/t)^d$ a

ii) pro každé $z \in \mathbb{S}^{d-1}$ existuje $x \in \mathcal{N}$ s $\|x-z\|_2 \le t$.

Důkaz: Vezmeme $x^1 \in \mathbb{S}^{d-1}$ libovolně.

Je-li $x^1, \dots, x^j \in \mathbb{S}^{d-1}$ už vybráno, vezmeme $x^{j+1} \in \mathbb{S}^{d-1}$ libovolné s $\|x^{j+1} - x^l\|_2 > t$ pro $l = 1, \dots, j$.

Toto opakujeme tak dlouho, jak jen je to možné; skončíme tedy pokud pro $\{x^1, \dots, x^m\}$ už $\forall z \in \mathbb{S}^{d-1} : \exists j \in \{1, \dots, m\}$ s $\|x^j - z\|_2 \le t$.

$\Rightarrow$ (ii)

i) dokážeme pomocí "volume argumentu".

Víme, že
- $\|x^i - x^j\|_2 > t$ pro všechna $i, j \in \{1, \dots, N\}$ s $i \ne j$.
- koule $B(x^i, t/2)$, $i = 1, \dots, m$ jsou tedy disjunktní;
- ale také obsažené v $B(0, 1 + t/2)$.

Srovnáním objemů plyne

$$m \cdot (t/2)^d \cdot V \le (1 + t/2)^d V,$$

. kde V je objem $B(0,1)$ v $\mathbb{R}^d$. Tedy

$$n = |\mathcal{N}| \leq \frac{(1+t/2)^d}{(t/2)^d} = \left(1+\frac{2}{t}\right)^d.$$

Věta: Nechť $N \geq m \geq s \geq 1$ jsou přirozená čísla a nechť $0<\varepsilon<1$ a $0<\delta<1$ jsou reálná čísla s

$$m \geq C\delta^{-2}\left(s\ln(eN/s) + \ln(2/\varepsilon)\right),$$ kde

$C>0$ je absolutní konstanta. Pak pro A normalizovanou Gaussovskou matici platí

$$\mathbb{P}(\delta_s(A) \leq \delta) \geq 1-\varepsilon.$$

Důkaz: Z Lemma: existuje $\mathcal{N} \subset Z := \{z \in \mathbb{R}^N, \operatorname{supp}(z) \subset \{1,\dots,s\}, \|z\|_2 = 1\}$ tak, že $(t = 1/4)$

i) $|\mathcal{N}| \leq 9^s$

ii) $\min_{x\in\mathcal{N}} \|x-z\|_2 \leq 1/4$ pro každé $z \in Z$.

Ukážeme, že pokud $\left|\|Ax\|_2^2 - 1\right| \leq \delta/2$ pro všechna $x \in \mathcal{N}$, tak i

$$\left|\|Az\|_2^2 - 1\right| \leq \delta \text{ pro } z \in Z.$$

Použijeme "bootstrap argument". Nechť $\gamma > 0$ je nejmenší číslo takové, že $\left|\|Az\|_2^2 - 1\right| \leq \gamma$ pro $z \in Z$ ... chceme $\gamma \leq \delta$.

Pak $\left|\|Au\|_2^2 - \|u\|_2^2\right| \leq \gamma\|u\|_2^2$ pro $\forall u \in \mathbb{R}^N$ s $\operatorname{supp}(u) \subseteq \{1,\dots,s\}$.

Nechť $u, v \in \mathbb{R}^N$ se $\operatorname{supp}(u) \cup \operatorname{supp}(v) \subseteq \{1,\dots,s\}$ a $\|u\|_2 = \|v\|_2 = 1$.

. Pak

$$|\langle Au, Av\rangle - \langle u,v\rangle| = \frac{1}{4}\Big|\left(\|A(u+v)\|_2^2 - \|A(u-\cancel{A}v)\|_2^2\right)$$

$$-\left(\|u+v\|_2^2 - \|u-v\|_2^2\right)\Big|$$

$$\leq \frac{1}{4}\left|\|A(u+v)\|_2^2 - \|u+v\|_2^2\right| + \frac{1}{4}\left|\|A(u-v)\|_2^2 - \|u-v\|_2^2\right|$$

$$\leq \frac{\gamma}{4}\|u+v\|_2^2 + \frac{\gamma}{4}\|u-v\|_2^2 = \frac{\gamma}{2}\left(\|u\|_2^2 + \|v\|_2^2\right) = \gamma.$$

a opět i

$$|\langle Au, Av\rangle - \langle u,v\rangle| \leq \gamma\|u\|_2\|v\|_2 \quad \text{pro } \forall u,v \in \mathbb{R}^N$$
$$\text{supp}(u)\cup\text{supp}(v) \subset \{1,\dots,N\}.$$

Nechť $z \in Z$, pak existuje $x \in \mathcal{N}$ s $\|x-z\|_2 \leq 1/4$.

Z trojúhelníkové nerovnosti pak plyne

$$\left|\|Az\|_2^2 - 1\right| = \left|\|Ax\|_2^2 - 1 + \langle A(z+x), A(z-x)\rangle - \langle z+x, z-x\rangle\right|$$

$$\leq \left|\|Ax\|_2^2 - 1\right| + \left|\langle A(z+x), A(z-x)\rangle - \langle z+x, z-x\rangle\right|$$

$$\leq \delta/2 + \gamma\|z+x\|_2 \cdot \|z-x\|_2 \leq \delta/2 + \gamma \cdot 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{\delta}{2} + \frac{\gamma}{2}$$

Vezmeme sup přes $z \in Z$: $\gamma \leq \frac{\delta}{2} + \frac{\gamma}{2}$ $\dots$ $\gamma \leq \delta$.

- Zbytek plyne z union bound:

$$\mathbb{P}(\delta_s(A)>\delta) \le \sum_{\substack{S\subset\{1,\dots,N\}\\ \#S\le s}} \mathbb{P}\left(\exists z\in\mathbb{R}^N: \mathrm{supp}(z)\subset S, \|z\|_2=1 \,\&\, \left|\|Az\|_2^2-1\right|>\delta\right)$$

$$= \binom{N}{s}\mathbb{P}\left(\exists z\in Z_s \left|\|Az\|_2^2-1\right|>\delta\right)$$

$$\le \binom{N}{s}\mathbb{P}\left(\exists x\in\mathcal{N}: \left|\|Ax\|_2^2-1\right|>\delta/2\right).$$

Pro každé $x\in\mathcal{N}$ je tato pst. $\le 2e^{-C'm\delta^2}$

Tedy $\mathbb{P}(\delta_s(A)>\delta)\le 9^s\cdot\binom{N}{s}\cdot 2\cdot e^{-C'm\delta^2}$.

Zbývá dokázat, že toto je $\le\varepsilon$ pokud platí předpoklady vět.

$$m\delta^2\ge C\left(s\ln\left(\frac{eN}{s}\right)+\ln(2/\varepsilon)\right) \qquad \binom{N}{s}\le\left(\frac{eN}{s}\right)^s$$

Tedy $\mathbb{P}(\;)\le e^{s\ln 9}\left(\frac{eN}{s}\right)^s\cdot 2e^{-C'\cdot C\left[s\ln\left(\frac{eN}{s}\right)+\ln(2/\varepsilon)\right]}$

$$=\underbrace{e^{s\{\ln 9+\ln\left(\frac{eN}{s}\right)-C'C\ln\left(\frac{eN}{s}\right)\}}}_{\le e^0=1}\cdot\underbrace{2e^{-C'C\ln(2/\varepsilon)}}_{=2(2/\varepsilon)^{-C'C}\;\le\; 2\cdot(2/\varepsilon)^{-1}=\varepsilon}\qquad C'C>1$$

Navíc $\ln 9+\underbrace{\ln\Big(\underbrace{\tfrac{eN}{s}}_{\ge e}\Big)}_{\ge 1}(1-C'C)\le\ln 9+(1-C'C)\le 0$

pro $1+\ln 9\le C'C$. ☒

4.4. Lemma Johnsona a Lindenstrausse

Věta o náhodných projekcích mraku bodů - téměř zachovává vzdálenosti

Lemma: Nechť $0<\varepsilon<1$ a nechť m, N a d jsou přirozená čísla s

$$m \geq 4\left(\varepsilon^2/2 - \varepsilon^3/3\right)^{-1} \ln N.$$

Pak pro každou množinu $\{x^1, \dots, x^N\} \subset \mathbb{R}^d$ pak ~~platí~~ existuje $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ takové, že

$$(*) \qquad (1-\varepsilon)\|x^i - x^j\|_2^2 \leq \|f(x^i) - f(x^j)\|_2^2 \leq (1+\varepsilon)\|x^i - x^j\|_2^2, \quad i,j \in \{1, \dots, N\}.$$

Důkaz: Nechť $f(x) = Ax$, kde

$$Ax = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{pmatrix} \omega_{1,1} & \cdots & \omega_{1d} \\ \vdots & & \vdots \\ \omega_{m1} & \cdots & \omega_{md} \end{pmatrix} x,$$

kde opět $\omega_{1,1}, \dots, \omega_{m,d}$ jsou i.i.d. standardní normální.

Ukážeme, že $f(x)$ splňuje $(*)$ s nenulovou pravděpodobností.

Pro $i,j \in \{1, \dots, N\}$, $i \neq j$ položíme $z = \frac{x^i - x^j}{\|x^i - x^j\|_2}$ a dostaneme

$$\mathbb{P}\left(\left|\|f(x^i) - f(x^j)\|_2^2 - \|x^i - x^j\|_2^2\right| > \varepsilon \|x^i - x^j\|_2^2\right) =$$

$$= \mathbb{P}\left(\left|\|Az\|_2^2 - 1\right| > \varepsilon\right) \leq 2e^{-\frac{m}{2}\left[\varepsilon^2/2 - \varepsilon^3/3\right]}$$

Tedy platí pro všechny $\binom{N}{2}$ páry:

$$\mathbb{P}(* \text{ neplatí}) \leq 2e^{-\frac{m}{2}\left[\varepsilon^2/2 - \varepsilon^3/3\right]}\binom{N}{2} < N^2 e^{-\frac{m}{2}\left[\varepsilon^2/2 - \varepsilon^3/3\right]}$$

$$= \exp\left(2\ln N - \frac{m}{2}\left[\varepsilon^2/2 - \varepsilon^3/3\right]\right) \leq e^0 = 1 \qquad \square$$