

5. Doplňky

-1-

5.1. Optimalita odhadu pro m

Na jedné straně víme, že $m \geq s$ je jistě potřebné pro rekonstrukci $x \in \mathbb{R}_s^N$. Na druhé straně je rekonstrukce možná (pomocí například matice), pokud $m \geq C_s \ln\left(\frac{eN}{s}\right)$.

Je tato mez optimální?

Lemma: Necht' $s \leq N$ jsou přiro. čísla. Pak existují podmnožiny

$T_1, \dots, T_M \subseteq \{1, \dots, N\}$ takové, že

i) $M \geq \left(\frac{N}{4s}\right)^{1/2}$,

ii) $|T_i| = s$ pro $i = 1, \dots, M$,

iii) $|T_i \cap T_j| < s/2$ pro $i \neq j$.

Důkaz: Greedy algoritmus: • Předpokládáme, že $s \leq N/4$, jinak $M=1$.

• Vybereme T_1, T_2, \dots indukčním způsobem (ii) a (iii) & pak dokážeme (i)

• Necht' $T_1 \subseteq \{1, \dots, N\}$ je libovolná s -elementová.

Počítáme množinu $\mathcal{N} \subseteq \{1, \dots, N\}$, které mají s prvku a T_1 mají přinejmenším alespoň $s/2$ prvků je omezen

$$\sum_{j=\lceil s/2 \rceil}^s \binom{s}{j} \binom{N-s}{s-j} \leq 2^s \max_{\lceil s/2 \rceil \leq j \leq s} \binom{N-s}{s-j} = 2^s \binom{N-s}{s-\lceil s/2 \rceil} = 2^s \binom{N-s}{\lfloor s/2 \rfloor}.$$

Tedy existují alespoň

$$\binom{N}{s} - 2^s \binom{N-s}{\lfloor s/2 \rfloor}$$

podmnožin $\{1, \dots, N\}$, které mají s prvků a mají prímik $s T_1$ a mění mezi $s/2$ prvky. Necht T_2 je libovolná dvojice.

Mějme již T_1, \dots, T_j s (ii) a (iii). Pak slyší alespoň

$$\binom{N}{s} - j \binom{N-s}{\lfloor s/2 \rfloor} \cdot 2^s$$

podmnožin $\{1, \dots, N\}$, ze kterých lze vybrat T_{j+1} . Pobrácujeme, dokud je tento výraz pozitivní... zastavíme se nejříve po M krocích, kde

$$\binom{N}{s} - M \binom{N-s}{\lfloor s/2 \rfloor} \cdot 2^s \leq 0;$$

$$\text{Tedy } M \geq \frac{\binom{N}{s}}{2^s \binom{N-s}{\lfloor s/2 \rfloor}} \geq 2^{-s} \frac{\binom{N}{s}}{\binom{N-\lfloor s/2 \rfloor}{\lfloor s/2 \rfloor}} = 2^{-s} \cdot \frac{N!}{s!(N-s)!} \cdot \frac{(\lfloor s/2 \rfloor)! (N-\lfloor s/2 \rfloor)!}{(N-\lfloor s/2 \rfloor)!}$$

$$= 2^{-s} \cdot \frac{N!}{s!(N-s)!} \cdot \frac{(\lfloor s/2 \rfloor)! (N-s)!}{(N-\lfloor s/2 \rfloor)!} = 2^{-s} \cdot \frac{N(N-1) \dots (N-\lfloor s/2 \rfloor + 1)}{s(s-1) \dots (\lfloor s/2 \rfloor + 1)}$$

$$= 2^{-s} \cdot \frac{N(N-1) \dots (N-\lfloor s/2 \rfloor + 1)}{s(s-1) \dots (\lfloor s/2 \rfloor + 1)} \geq 2^{-s} \left(\frac{N}{s}\right)^{\lfloor s/2 \rfloor}$$

$$\geq 2^{-s} \left(\frac{N}{s}\right)^{s/2} = \frac{1}{4^{s/2}} \left(\frac{N}{s}\right)^{s/2} = \left(\frac{N}{4s}\right)^{s/2}.$$

Věta: Necht $s \leq m \leq N$ jsou přirozená čísla, necht $A \in \mathbb{R}^{m \times N}$ - 3-

a necht $\Delta: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^N$ je lineární zobrazení s

$$\|x - \Delta(Ax)\|_2 \leq C \frac{\sigma_k(x)_1}{\sqrt{k}} \text{ pro všechna } x \in \mathbb{R}^m.$$

Pak $m \geq C^2 \ln\left(\frac{e^N}{s}\right)$.

Důkaz: Předpokládejme $C \geq 1$ a $s \leq \frac{N}{8}$.

Existují množiny (lemma!) $T_1, \dots, T_M \subset \{1, \dots, N\}$ s

$$M \geq \left(\frac{N}{4s}\right)^{s/2}, |T_i| = s \text{ a } |T_i \cap T_j| \leq s/2, i \neq j$$

Necht $x_i = \chi_{T_i} \cdot \frac{1}{\sqrt{s}}$... tedy $\|x_i\|_2 = 1$, $\|x_i\|_1 = \sqrt{s}$, $\|x_i - x_j\|_2 > 1$ pro $i \neq j$.

Budíž $B = \{z \in \mathbb{R}^m : \|z\|_1 \leq \frac{\sqrt{s}}{4C} \text{ a } \|z\|_2 \leq \frac{1}{4}\}$.

Pak $x_i \in 4CB$

Tvrdíme, že $A(x_i + B)$ jsou ^{podvojně} disjunktivní.

Necht i, j pak $\exists z, z' \in B: A(x_i + z) = A(x_j + z')$

Tedy: $\Delta(A(x_i + z)) = \Delta(A(x_j + z'))$ a dostaneme

$$1 < \|x_i - x_j\|_2 = \|(x_i + z - \Delta(A(x_i + z))) - (x_j + z' - \Delta(A(x_j + z')))\|_2$$

$$\leq \|x_i + z - \Delta(A(x_i + z))\|_2 + \|x_j + z' - \Delta(A(x_j + z'))\|_2 + \|z\|_2 + \|z'\|_2$$

$$\leq \frac{C \sigma_s(x_i + z)_1}{\sqrt{s}} + \frac{C \sigma_s(x_j + z')_1}{\sqrt{s}} + \|z\|_2 + \|z'\|_2$$

$$\leq \frac{C \|z\|_1}{\sqrt{s}} + \frac{C \|z'\|_1}{\sqrt{s}} + \|z\|_2 + \|z'\|_2 \leq 1.$$

\nearrow x_i je s -sparse

-4-

Části $A(x_i + B) \subseteq A((4C+1)B)$, $i=1, \dots, M$.

Necht $d \leq m$ je dimenze rank A ... Vhodný d -dim. objem $A(B)$.

Srovnávej objemy:

$$\sum_{j=1}^M \text{vol}(A(x_j + B)) \leq \text{vol}((4C+1)A(B))$$

$$\left(\frac{N}{4\rho}\right)^{d/2} \cdot V \leq M \cdot \text{vol}(A(x_j + B)) \leq (4C+1)^d \cdot V \leq (4C+1)^m \cdot V$$

$$\frac{d}{2} \ln\left(\frac{N}{4\rho}\right) \leq m \ln(4C+1)$$

$$\text{Pro } \rho \leq \frac{N}{8} \text{ je } \ln\left(\frac{N}{4\rho}\right) \geq c' \ln\left(\frac{eN}{\rho}\right) \dots m \geq \frac{\frac{d}{2} \cdot c' \ln\left(\frac{eN}{\rho}\right)}{\ln(4C+1)}$$