7. Další algoritmy pro rekonstrukci řídkých vektorů ("sparse recovery")

• Doposud: optimalizační metody ... globální optimalizace konvexních problémů: např.: $\min_{z \in \mathbb{R}^N} \|z\|_1$, s.t. $Az = y$

7.1. Greedy algoritmy (= "hladové algoritmy")

• Orthogonal matching pursuit (OMP)

Pro vstupy $A \in \mathbb{R}^{m \times N}$, $y \in \mathbb{R}^m$

• Inicializace $S^0 = \emptyset$, $x^0 = 0$

• $S^{n+1} = S^n \cup \{j_{n+1}\}$, $j_{n+1} := \operatorname{argmax}_{j \in \{1,\dots,N\}} |(A^*(y - Ax^n))_j|$

$$x^{n+1} = \operatorname{argmin}_{\substack{z \in \mathbb{C}^N \\ (\text{resp. } \mathbb{R}^N)}} \{\|y - Az\|_2, \operatorname{supp}(z) \subset S^{n+1}\}$$

... opakujeme pro $n \leq n_0$ ... výstup $x^\# = x^{n_0}$.

• Iterativní algoritmus, který postupně rozšiřuje nosič (S^j) a hledá nejmenší "chybu" mezi Az, $\operatorname{supp}(z) \subset S^j$ a y.

• Proč rozšiřujeme potenciální nosič právě o j_{n+1}?

Lemma: Nechť $A \in \mathbb{C}^{m\times N}$ je matice s ℓ_2-norm. sloupci. Pro daná $S \subset \{1,\dots,N\}$, $j \in \{1,\dots,N\}$ a $v \in \mathbb{C}^N$ s $\operatorname{supp}(v) \subset S$ a

$$w := \operatorname*{argmin}_{z\in\mathbb{C}^N} \{\|y-Az\|_2,\ \operatorname{supp}(z) \subset S\cup\{j\}\}$$

platí

$$\|y-Aw\|_2^2 \le \|y-Av\|_2^2 - |(A^*(y-Av))_j|^2.$$

Důkaz: Uvažujme vektor typu $v + te_j$ s $t\in\mathbb{C}$ ... má nosič na $S\cup\{j\}$ a platí

$$\|y-Aw\|_2^2 \le \min_{t\in\mathbb{C}} \|y-A(v+te_j)\|_2^2.$$

Položme $t = \rho e^{i\theta}$, $\rho \ge 0$, $\theta\in[0,2\pi)$:

$$\|y-A(v+te_j)\|_2^2 = \|y-Av-tAe_j\|_2^2 = \|y-Av\|_2^2 + |t|^2\|Ae_j\|_2^2 - 2\operatorname{Re}(\langle \bar{t}(y-Av), Ae_j\rangle)$$

$$= \|y-Av\|_2^2 + \rho^2 - 2\operatorname{Re}(\rho e^{i\theta}(A^*(y-Av))_j) \ge \|y-Av\|_2^2 + \rho^2 - 2\rho|(A^*(y-Av))_j|$$

kde pro vhodné θ platí i rovnost...

Minimalizace přes ρ: $\rho = |(A^*(y-Av))_j|$ $\Rightarrow$

$$\min_{t\in\mathbb{C}} \|y-A(v+te_j)\|_2^2 = \|y-Av\|_2^2 - |(A^*(y-Av))_j|^2.$$ $\boxtimes$

Lemma: Pro danou množinu $S\subset\{1,\dots,N\}$ a

$$v := \operatorname*{argmin}_{z\in\mathbb{C}^N} \{\|y-Az\|_2 : \operatorname{supp}(z)\subset S\}$$

platí $(A^*(y-Av))_S = 0$.

Důkaz: Av je ortogonální projekce y na $\{Az : \operatorname{supp}(z)\subset S\}$...

je tedy charakterizován $\langle y-Av, Az\rangle = 0$ pro $\forall z\in\mathbb{C}^N$ s $\operatorname{supp}(z)\subset S$

... tedy $\langle A^*(y-Av), z\rangle = 0$ pro $\forall z\in\mathbb{C}^N$ s $\operatorname{supp}(z)\subset S$... Tedy $(A^*(y-Av))_S = 0$. $\boxtimes$

Compressive sampling matching pursuit (CoSaMP)

- Pro $A, y, s \in \{1, \dots, N\}$: $x^0 = 0$
- $U^{m+1} = supp(x^m) \cup L_{2s}(A^*(y - Ax^m))$

$L_s(z)$ ... množina indexů s nejv. souřadnic $z \in \mathbb{C}^N$ v abs. hodnotě

- $u^{m+1} = \underset{z \in \mathbb{C}^N}{\operatorname{argmin}} \{\|y - Az\|_2 : supp(z) \subset U^{m+1}\}$
- $x^{m+1} = H_s(u^{m+1})$ ... $H_s(z) = z_{L_s(z)}$ ... z zúžené na s svých největších koef.

.... opakujeme

Věta: • Pro $A \in \mathbb{C}^{m \times N}$, $y = Ax + e$, kde x je s-sparse, x^m z OMP

- Pokud $\delta_{13s} < 1/6$, pak $\|y - Ax^{\bar{m}}\|_2 \leq C\|e\|_2$, $\bar{m} = 12s$.
- Pro $\delta_{4s} < 0.478$ a x^m z (COSAMP) platí

$$\|x^m - x_S\|_2 \leq \rho^m \|x^0 - x_S\|_2 + \tau \|Ax_{\bar{S}} + e\|_2,$$ kde $0 < \rho < 1$ a $\tau > 0$ závisí na δ_{4s}.

... spec. x s-sparse, $x^0 = 0$

$$\|x^m - x\|_2 \leq \rho^m \|x\|_2 + \tau \overbrace{\|Ax + e\|_2}^{\|y\|_2}.$$

- Iterative Hard Thresholding : $x_{m+1} := H_s(x^m + A^*(y - Ax^m))$ ... opakovat

Věta: Pro $\delta_{3s} < 1/2$ a s-řídké $x \in \mathbb{C}^N$ konvergují x^m z (IHT) k x.