1. Náhodný proces

$X(t,\omega)$: t - čas

ω - náhodní elementární jevy

příklad: cena akcií, poloha částice

Definice: Buď $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ pravděpodobnostní prostor a I lib. neprázdná množina. Potom systém náh. veličin $\{X_t, t \in I\}$ nazveme náhodným procesem na I.

Pozn. 1, Značení $\{X_t : t \in I\} = (X_t)_{t \in I} = (X(t))_{t \in I}$

2, $\forall t \in I$: X_t je náhodná (reálná) veličina: $X_t(\omega) \in \mathbb{R}$

3, Pro $E \neq \emptyset$, $\mathcal{E}$: σ-algebra na E $\Rightarrow (E, \mathcal{E})$ ... stavový prostor náh. veličin X_t

$(X_t)_{t \in I}$ lze zobecnit: $X_t : \Omega \to E$, $\forall t \in I$

↳ náh. veličina s hodnotami v E

(E-hodnotový náhodný proces)

4, $X_t^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X_t(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}$ .... $\forall B \in \mathcal{E}$

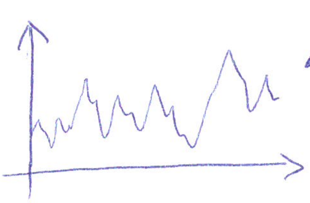
... vzor měř. je měřitelný

5, Pro E topologický $\Rightarrow \mathcal{E}$ lze volit jako Borelovskou σ-algebru (nejm. σ-algebra nad systémem ot. množin).

Definice: Buď $(X_t)_{t \in I}$ náhodný proces s hodnotami v $(E, \mathcal{E})$. Pak zobrazení $t \to X_t(\omega)$ pro $\forall \omega \in \Omega$ pevné nazýváme trajektorií náhodného procesu X.

Př. • $X(\cdot, \omega) = X_\cdot(\omega)$ je pro pevné ω funkcí „času": $I \to E$

↙ řez pro konst. $\omega = \omega_1$ ... jednotlivé subjekty (jedna částice, pacient, akcie, ...)



Klasifikace

a, dle času (I) 1, $I=\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_0^+ = \langle 0, +\infty)$, $\langle a, b \rangle$

... X je náhodný proces ve spojitém čase

2, $I=\mathbb{N}$ ... $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ... časová řada
$\phantom{2, I=\mathbb{N} ... (X_n)} n\in\mathbb{Z}$

3, $I\subset\mathbb{R}^2$ ... $(X_t)_{t\in I}$ ... náhodné pole

b, dle E ... stavů 1, $E=\mathbb{R}$ ... náhodný proces (n.p.)

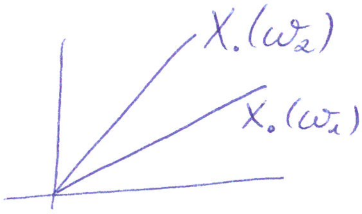
2, $E=\mathbb{R}^d$ ... $\mathbb{R}^d$-hodnotový proces

3, $E=\mathbb{C}$ ... komplexní proces

Příklad: 1, náhodná procházka: $X_0=0$, $X_{n+1}= \begin{cases} X_n-1, & p=1/2 \\ X_n+1, & p=1/2 \end{cases}$

2, náhodný vektor φ

$X_t = t\cdot\varphi$, $X_t(\omega)=t\cdot\varphi(\omega)$



Rozdělení náhodného procesu

Víme: $\forall t\in I$ je X_t náh. veličina ... víme/má smysl $Law(X_t)=\mathcal{L}(X_t)$

$\equiv$ pravděpodobnostní rozdělení X_t

"Umíme" určit $\mathbb{P}[X_{t_0}>a]$, co ale $\mathbb{P}[\sup_{t\geq 0} X_t(\omega)>a]=?$

Nejprve se definují konečně rozměrná rozdělení n.p. $(X_t)_{t\in I}$

- $I_n=\{t_1,\dots,t_n\}$, $t_i\in I$ ... má smysl uvažovat $Law(X_{t_1},\dots,X_{t_n})$.

Značení

- $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \{t_1, \dots, t_n\}$
- Stavový prostor: $E^n = E^{I_n} = \{(x_1, \dots, x_n) = x \mid x_i \in E\} = \bigtimes_{i=1}^{n} E_i \quad (E_i \equiv E)$
- σ-algebra: $\mathcal{E}^{I_n} = \mathcal{E}^n = \bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{E}_i \ (\mathcal{E}_i = \mathcal{E})$

$$= \sigma\Big(\underbrace{\bigtimes_{i=1}^{n} B_i}_{\text{není σ-alg.}},\ B_i \in \mathcal{E}_i\Big)$$

↳ nejm. σ-alg. nad systémem v závorce

↳ $(E^n, \mathcal{E}^n)$ … měřitelný prostor

- položme $\prod_{I\, I_n} X := (X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$

  Π je projekce ze všech časů do konečného výběru I_n.

Lemma: Za výše uvedených předp. platí, že $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ je náhodný vektor z $(\Omega, \mathcal{F})$ do $(E^n, \mathcal{E}^n)$.

Důkaz:
- Chceme ukázat, že $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ je měřitelný, tj. $\forall B \in \mathcal{E}^n$

  $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})^{-1}(B) \in \mathcal{F}$?

  <u>Definujeme</u>: $\Sigma' = \{C \in \mathcal{E}^n : (X_{t_1}, \dots, X_{t_n})^{-1}(C) \in \mathcal{F}\} \subset \mathcal{E}^n$

  a chceme $\mathcal{E}^n \subset\subset \Sigma'$

  - ukážeme, že Σ' je σ-algebra, která obs. generátory $\mathcal{E}^n$

    $\Rightarrow \mathcal{E}^n$ je nejm. s touto vlastností $\Rightarrow \mathcal{E}^n \subset\subset \Sigma'$.

- Σ' je σ-algebra (D.CV.)

• Σ obs. generátory $\mathcal{E}^m$?!

Nechť $C = \bigtimes_{i=1}^{m} B_i$, $B_i \in \mathcal{E}$ ... chceme $C \in \Sigma$,

tedy $(X_{t_1}, \dots, X_{t_m})^{-1}\left(\bigtimes_{i=1}^{m} B_i\right) \in \mathcal{F}$?

$$\overset{\shortparallel}{\{}\omega \in \Omega : (X_{t_1}(\omega), \dots, X_{t_m}(\omega)) \in \bigtimes_{i=1}^{m} B_i\}$$

$$\overset{\shortparallel}{\{}\omega \in \Omega : X_{t_1}(\omega) \in B_1, \dots, X_{t_m}(\omega) \in B_m\} = \bigcap_{i=1}^{m} \underbrace{\{\omega : X_{t_i}(\omega) \in B_i\}}_{= X_{t_i}^{-1}(B_i) \in \mathcal{F}}$$

$\Rightarrow$ konečný průnik množin z $\mathcal{F}$ ... $\in \mathcal{F}$. ☒

Pro $B \in \mathcal{E}^m$ má tedy smysl studovat

$$\mathbb{P}[\{\omega : (X_{t_1}, \dots, X_{t_m})(\omega) \in B\}] =: \mathbb{P}^{I_m}(B)$$

$\Rightarrow (E^m, \mathcal{E}^m, \mathbb{P}^{I_m})$ je pravděpodobnostní prostor

$$\mathbb{P}^{I_m}(B) = \mathbb{P}[\{\omega : (X_{t_1}, \dots, X_{t_m})(\omega) \in B\}] = \mathbb{P}(\{\omega : \omega \in (X_{t_1}, \dots, X_{t_m})^{-1}(B)\})$$

$$= \mathbb{P}\left[\left(\prod_{I I_m} X\right)^{-1}(B)\right] \quad \text{... push-forward measure}$$

Definice: $\mathbb{P}^{I_m}$ na $(E^m, \mathcal{E}^m)$ se nazývá konečněrozměrným rozdělením náh. procesu X v bodech („časech") $(t_1, \dots, t_m)$.

Pozn.: Pro $B_i = (-\infty, c_i\rangle$, $B = \bigtimes_{i=1}^{m} B_i$ ... $\mathbb{P}^{I_m}(B) = \mathbb{P}[\{\omega : X_{t_1}(\omega) \in (-\infty, c_1\rangle, \dots$

$\dots, X_{t_m}(\omega) \in (-\infty, c_m\rangle\}] =: F_{t_1, \dots, t_m}(c_1, \dots, c_m)$

je konečněrozměrná dist. funkce náh. proc. X k časům $(t_1, \dots, t_m)$ v bodech $(c_1, \dots, c_m)$.

- Pokud ex. příslušné parc. derivace, pak

$$f_{t_1,\dots,t_n}(c_1,\dots,c_n) = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \dots \partial x_n} F_{t_1,\dots,t_n}(c_1,\dots,c_n)$$

je konečně rozm. hustota náh. procesu X příslušnou k $(t_1,\dots,t_n)$ v bodech $(c_1,\dots,c_n)$.

- Odteď $E = \mathbb{R}$ ... $X(t,\omega) \in \mathbb{R}$ ... $X(\cdot,\omega)$ jsou reálné funkce t
  ↳ pro různé ω je $X(\cdot,\omega)$ „náhodná" funkce na I.
- Množina všech funkcí z I do $\mathbb{R}$: $\mathbb{R}^I = \{f: I \to \mathbb{R}\} = \bigtimes_{t\in I} \mathbb{R}$.
- $f: \mathbb{R} \to I$ ... $f \in \mathbb{R}^I$

$$\prod_{I\{t\}} f = f(t) \quad ; \quad \prod_{I\{t\}} : \mathbb{R}^I \to \mathbb{R}$$

Pro zavedení pojmu náhodné funkce z I do $\mathbb{R}$ potřebujeme nejprve

σ-algebra na $\mathbb{R}^I$:

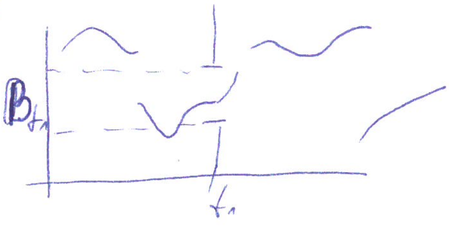
Definice: Říkáme, že $C \subset \mathbb{R}^I$ je cylindrická, pokud $C = \bigtimes_{t\in I} B_t$, kde $B_t \in \underbrace{\mathcal{B}(\mathbb{R})}_{\text{borel. na } \mathbb{R}}$ a navíc $B_t = \mathbb{R}$ až na konečný počet časů t,

tj. $n := \text{card} \underbrace{\{t \in I; B_t \neq \mathbb{R}\}}_{=\{t_1,\dots,t_n\}} < +\infty$. $I_n := \{t_1,\dots,t_n\}$, $B_{t_i} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Příklad: $C = \bigtimes_{t\in I\setminus\{t_1\}} \mathbb{R} \times B_{t_1}$ ... $f \in C \iff f(t_1) \in B_{t_1}$

... množina funkcí, které v t_1 prochází „okýnkem" B_{t_1}.

$$C = \Big(\prod_{I\{t_1\}}\Big)^{-1}(B_{t_1})$$



a, Borelovská σ-algebra nad $\mathbb{R}^I$

- $\Gamma := \{ c \in \mathbb{R}^I : c$ je cylindrická, B_k otevřené$\}$

  je <u>subbáze</u> topologie na $\mathbb{R}^I$

  - systém otevřených množin, pomocí konečných průniků vyrobíme <u>bázi</u> topologie
  - pomocí lib. (i nespočetných) sjednocení vyrobíme <u>topologii</u> na $\mathbb{R}^I$ ..... $\tau_{\mathbb{R}^I}$

  $\sigma(\tau_{\mathbb{R}^I}) = \mathcal{B}(\tau_{\mathbb{R}^I})$

b, Kolmogorovská σ-algebra

$\mathcal{K}(\mathbb{R}^I) = \sigma(\Gamma')$, $\Gamma' = \{ c \in \mathbb{R}^I : c$ je cylindrická$\}$

... nejm. σ-algebra nad Γ'

... spočetné operace $\Rightarrow$ $\mathcal{K}(\mathbb{R}^I) \subset \mathcal{B}(\tau_{\mathbb{R}^I})$

Platí: 1. Když I je nejvýše spočetná $\Rightarrow$ $\mathcal{K}(\mathbb{R}^I) = \mathcal{B}(\tau_{\mathbb{R}^I})$

2. Pokud místo $\mathbb{R}^I$ uvažujeme od začátku $(C(\langle 0,1\rangle), \|\cdot\|_\infty)$,

pak $\mathcal{K}(C(\langle 0,1\rangle), \|\cdot\|_\infty) = \mathcal{B}(C(\langle 0,1\rangle), \|\cdot\|_\infty)$.

<u>Příklady</u>. 1, $I = \mathbb{N}$

$A = \{ f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} ; \lim_{n\to\infty} f(n) = 0 \}$

$f \in A \Leftrightarrow \forall N \in \mathbb{N}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : |f(n)| < \frac{1}{N}$

$\Leftrightarrow f \in \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n_0 \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq n_0} \underbrace{\{ g : |g(n)| < \tfrac{1}{N} \}}_{\in \Gamma \subset \Gamma'}$ ... $g(n) \in (-\frac{1}{N}, \frac{1}{N})$

... $A \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$

2, $I = \langle 0, \infty)$ ... stejný trik neprojde ... nespočetný průnik $\bigcap_{x \geq x_0}$

$\{ f \in \mathbb{R}^{\langle 0,\infty)} : f(t_1) \leq c_1, \ldots, f(t_n) \leq c_n \} \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^{\langle 0,+\infty)})$

$= \bigcap_{i=1}^{n} \{ f : f(t_i) \leq c_i \}$ ... Obecně $C(\langle 0,\infty)) \notin \mathcal{K}(\langle 0,\infty))$.

Připomeňme, že $F_{t_1,\dots,t_n}(c_1,\dots,c_n) = \mathbb{P}[\{\omega : X_{t_1}(\omega) \in (-\infty, c_1\rangle, \dots, X_{t_n}(\omega) \in (-\infty, c_n\rangle\}]$

$$= \mathbb{P} \bigcap_{i=1}^{n} \{\omega : X_{t_i} \in (-\infty, c_i\rangle\}$$

splňuje • symetrie ... $F_{t_1,t_2}(c_1,c_2) = F_{t_2,t_1}(c_2,c_1)$

$$F_{t_1,\dots,t_n}(c_1,\dots,c_n) = F_{t_{\pi(1)},\dots,t_{\pi(n)}}(c_{\pi(1)},\dots,c_{\pi(n)}),\ \pi \text{ permutace na } \{1,\dots,n\}$$

• konzistence • $\lim_{c_2 \to \infty} F_{t_1,t_2}(c_1,c_2) = F_{t_1}(c_1)$

• $\lim_{c_i \to +\infty} F_{t_1,\dots,t_n}(c_1,\dots,c_n) = F_{t_1,\dots,t_{i-1},t_{i+1},\dots,t_n}(c_1,\dots,c_{i-1},c_{i+1},\dots,c_n)$

Systém funkcí $\{F_{t_1,\dots,t_n}(c_1,\dots,c_n)$ pro $t_1,\dots,t_n \in \mathbb{R}$, $c_1,\dots,c_n \in \mathbb{R}\}$ s těmito vlastnostmi nazýváme "konzistentní systém distribučních funkcí".

11.10.2017

... konečněrozm. distr. funkce náh. procesu X tvoří konzistentní systém.

Věta 1: Daniell-Kolmogorov (1933)

Buď $I \neq \emptyset$ a $\{F_{t_1,\dots,t_n} : I_n = \{t_1,\dots,t_n\} \subset I\}$ konzistentní systém distribučních funkcí. Pak ex. pravděpodobnostní míra μ na měřitelném prostoru $(\mathbb{R}^I, \mathcal{B}(\mathbb{R}^I))$ taková, že pro $X_t(\omega(\cdot)) := \omega(t)$, $\omega(\cdot) \in \mathbb{R}^I$, $t \in I$ platí

$$\mu(\omega(\cdot) : X_{t_1}(\omega(\cdot)) \leq c_1, \dots, X_{t_n}(\omega(\cdot)) \leq c_n) = F_{t_1,\dots,t_n}(c_1,\dots,c_n)$$

Bez důkazu

Příklad: $I=[0;1]$, $\{t_1,\dots,t_n\}\subset[0;1]$ pro $n\in\mathbb{N}$

$$\Downarrow$$

$$F_{t_1,\dots,t_n}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$$

$$\Downarrow$$

Pokud je $\{F_{t_1,\dots,t_n}\}$ konzistentní $\overset{\text{Věta 1}}{\Longrightarrow}$ $\Omega=\mathbb{R}^{[0;1]}$, $\mathcal{F}=\mathcal{K}(\mathbb{R}^{[0;1]})$

$\Longrightarrow$ $\exists\mu$ na $(\Omega,\mathcal{F})$ a ex. proces $(X_t)_{t\in[0;1]}$:

$$\mu(\{\omega\in\Omega: X_{t_1}(\omega)\le c_1,\dots,X_{t_n}(\omega)\le c_n\})=F_{t_1,\dots,t_n}(c_1,\dots,c_n)$$

Příklad: Provedeme N nezávislých hodů kostkou

- $E=\{1,2,\dots,6\}$, $I=\{1,2,\dots,N\}$, $\Omega=\{1,2,\dots,6\}^N$, $\mathcal{F}=2^\Omega$
- $(X_t)_{t=1,\dots,N}$ ... $X_t(\underset{\in\Omega}{\omega})=X_t(\omega_1,\dots,\omega_N)=\omega_t$.

Pozn: • μ je definována na $\mathcal{K}(\mathbb{R}^I)$, ne na $\mathcal{B}(\mathbb{R}^I)$

• Pro (X_t) obecně nevíme nic o trajektoriích

... chceme např. vědět, s jakou pravděpodobností jsou spojité:

$\mu(\omega: X_t(\omega)\in C(I))$ ... ~~obecně~~ ale $C([0;1])\notin\mathcal{K}(\mathbb{R}^{[0;1]})$.

Ekvivalence náhodných procesů

Definice: Nechť X, Y jsou náhodné procesy. Řekneme, že

1, Y je verze (modifikace) procesu X, když

$\forall t\in I: \mathbb{P}(X_t=Y_t)=1 \overset{def}{\Longleftrightarrow} X_t=Y_t$ s.j. pro všechna $t\in I$.

2, X a Y mají stejná konečněrozměrná rozdělení, když

$\mathbb{P}((X_{t_1},\dots,X_{t_n})\in B)=\mathbb{P}((Y_{t_1},\dots,Y_{t_n})\in B)$ pro všechna $B\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$

a pro všechna $\{t_1,\dots,t_n\}\subset I$.

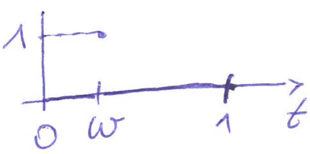
... tedy $\forall I_n\subset I\ \forall B\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n): \mathbb{P}_X^{I_n}(B)=\mathbb{P}_{Y}^{I_n}(B)$.

3, X a Y jsou nerozlišitelné, když

$\mathbb{P}(\forall t\in I: X_t=Y_t)=1$

Příklad: $I=[0;1]$, $\Omega=[0;1]$ & Lebesgueova míra

$X_t(\omega)=0$; $Y_t(\omega)=\begin{cases}0, & t\neq\omega\\ 1, & t=\omega\end{cases}$ Trajektorie Y: $\omega\in[0;1]$



$t\in[0;1]$ pevné:

$\mathbb{P}(X_t=Y_t)=\mathbb{P}(\{\omega: X_t(\omega)=Y_t(\omega)\})=\mathbb{P}(\{\omega: 0=Y_t(\omega)\})$

$=\mathbb{P}(\{\omega: \omega\neq t\})=\mathbb{P}(\Omega\setminus\{t\})=1$

ale $\mathbb{P}(\forall t: X_t=Y_t)=\mathbb{P}(\{\omega: \forall t\in[0;1]: X_t(\omega)=Y_t(\omega)\})$

$=\mathbb{P}(\{\omega: \forall t\in[0;1]: 0=Y_t(\omega)\})=\mathbb{P}(\emptyset)=0.$

Pozn.: 3. $\Rightarrow$ 1. a 1. $\not\Rightarrow$ 3. podle příkladu výše

2. má smysl i pro X a Y def. na různém prostoru

1. $\Rightarrow$ 2. 1. $\Rightarrow$ 3. pro I spočetnou nebo I resp. ~~se~~ separabilní při spojitých trajektoriích.

Existence spojité verze

Věta 2: Kolmogorov-Čencov (1956) - postačující podmínka

Buď $(X_t)_{t\in I}$ náhodný proces takový, že existují $\alpha > 0, \beta > 0, C > 0$ takové, že

$$\mathbb{E}|X_t - X_s|^\alpha \leq C|t-s|^{1+\beta}.$$

Potom existuje spojitá verze Y k procesu X.

Pozn.: • Pokud má proces spojitou verzi, budeme uvažovat tuto sp. verzi

• Je jen postačující podmínka

Např. $Y \overset{d}{\sim} N(0,1)$, $X_t = \exp[(Y\sqrt{t})^3]$

Trajektorie: $X_\cdot(\omega) = \exp[(Y(\omega)\cdot\sqrt{\cdot})^3]$ $\leftarrow$ spojité

ale $\mathbb{E}|X_s - X_t|^\alpha = +\infty$ pro všechna $\alpha > 0$.

Pravděpodobnostní charakteristiky náhodného procesu

Definice: • Buď $X = (X_t)_{t\in I}$ komplexní náhodný proces s konečnou střední hodnotou ($\forall t: \mathbb{E}|X_t| < +\infty$). (Komplexní) funkci $\mu: I \to \mathbb{C}$ def. předpisem $\mu_t := \mathbb{E}X_t$ nazveme střední hodnotou X. Je-li $\mu \equiv 0$, pak X nazveme centrovaný.

• Pokud má X konečné druhé momenty ($\forall t: \mathbb{E}|X_t|^2 < +\infty$), pak funkci $C_X: I\times I \to \mathbb{C}$, $C_X(s,t) = \mathbb{E}[(X_s-\mu_s)\overline{(X_t-\mu_t)}]$. C_X se nazývá autokovarianční funkce procesu X.

• Dále definujeme $R_X(s,t) = \mathbb{E}[X_s \overline{X_t}]$, autokorelační funkci a $C_X(t,t)$ nazveme rozptyl X v čase t.

Vlastnosti: 1, Platí Cauchy-Schwarzova nerovnost

$$|R_X(s,t)| \leq \sqrt{R_X(s,s)} \cdot \sqrt{R_X(t,t)}$$

2, R_X, C_X jsou tzv. pozitivní semidef. funkce

$$\forall I_m = \{t_1, \dots, t_m\} \ \forall \alpha \in \mathbb{C}^m: \sum_{i,j=1}^{m} \alpha_i C_X(t_i,t_j)\overline{\alpha_j} \geq 0$$

Opravdu: $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{m} \alpha_i C_X(t_i,t_j)\overline{\alpha_j} = \sum_{i,j=1}^{m} \alpha_i \mathbb{E}[(X_{t_i}-\mu_{t_i})\overline{(X_{t_j}-\mu_{t_j})}]\overline{\alpha_j}$

$$= \mathbb{E} \sum_{i,j=1}^{m} \alpha_i (X_{t_i}-\mu_{t_i}) \overline{\alpha_j (X_{t_j}-\mu_{t_j})} = \mathbb{E}\left|\sum_{i=1}^{m} \alpha_i (X_{t_i}-\mu_{t_i})\right|^2 \geq 0$$

Tedy $C_X^{I_m} = \begin{pmatrix} C_X(t_1,t_1) & \dots & C_X(t_1,t_m) \\ \vdots & & \\ C_X(t_m,t_1) & \dots & C_X(t_m,t_m) \end{pmatrix} \succcurlyeq 0$, $\langle \alpha, C_X^{I_m} \alpha \rangle \geq 0$. ← kovarianční matice

3, $R_X(t,s) = \overline{R_X(s,t)}$, $C_X(t,s) = \overline{C_X(s,t)}$

4, Lze ukázat, že $\forall \mu: I \to \mathbb{C}$ a $\forall$ pozitivní semi-definitní funkci $C: I \times I \to \mathbb{C}$ existuje náh. proces X tak, že μ a C jsou jeho střední hodnota a autokovarianční funkce.

Příklad: Y – náh. proměnná, $Y \overset{\mathcal{D}}{\sim} U(0,1)$ – rovnoměrné rozdělení na $[0,1]$.

Položme $X_t := t \cdot e^Y$, $t \geq 0$.

1, $F_t(x) = \mathbb{P}(X_t \leq x) = \mathbb{P}(t \cdot e^Y \leq x) = \mathbb{P}(e^Y \leq \frac{x}{t}) = \mathbb{P}(Y \leq \ln(\frac{x}{t}))$ $\quad | x \geq 0$

$$= \begin{cases} x \leq t: & 0 \\ t < x < e \cdot t: & \ln(\frac{x}{t}) \\ e \cdot t \leq x: & 1 \end{cases} \quad ; f_t(x) = \begin{cases} x \leq t: & 0 \\ t < x < e \cdot t: & \frac{\partial}{\partial x} \ln(\frac{x}{t}) = \frac{t}{x} \cdot \frac{1}{t} = \frac{1}{x} \\ e \cdot t \leq x: & 0 \end{cases}$$

- $\mathbb{E}X_t = \mu(t) = \int_t^{e\cdot t} x f_t(x)\,dx = \int_t^{e\cdot t} x\cdot \frac{1}{x}\,dx = t(e-1)$

$$= \int_0^1 e^y \cdot t \cdot \underbrace{f_Y(y)}_{=1}\,dy = t(e-1)$$

- $R_X(s,t) = \mathbb{E}(X_s X_t) = \mathbb{E}[e^Y t e^Y s] = st\,\mathbb{E}[e^{2Y}] = st\int_0^1 e^{2y}\cdot 1\cdot dy = \frac{st}{2}(e^2-1)$

- $C_X(s,t) = \mathbb{E}[(X_s-\mu_s)(\overline{X_t-\mu_t})] = \mathbb{E}[X_s\overline{X_t} - \mu_s\overline{X_t} - X_s\overline{\mu_t} + \mu_s\overline{\mu_t}]$

$$= \mathbb{E}[X_s\overline{X_t}] - \mu_s\,\mathbb{E}[\overline{X_t}] - \overline{\mu_t}\,\mathbb{E}[X_s] + \mu_s\overline{\mu_t} = R_X(s,t) - \mu_s\overline{\mu_t} - \overline{\mu_t}\mu_s + \mu_s\overline{\mu_t}$$

$$= R_X(s,t) - \mu_s\overline{\mu_t}$$

$$= \frac{st}{2}(e^2-1) - t(e-1)s(e-1) = \frac{st}{2}(e^2-1) - st(e^2-2e+1) = st\left(-\frac{e^2}{2} + 2e - \frac{3}{2}\right).$$

- $\mathbb{E}|X_s - X_t| = \mathbb{E}|se^Y - te^Y| = |s-t|\,\mathbb{E}e^Y = |s-t|\cdot\int_0^1 e^y\,dy = |s-t|(e-1).$

Příklad: Bernoulliho proces

$X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, X_n nezávislé náhodné proměnné: $X_n = \begin{cases} 1 & \text{sprav. } p \\ 0 & \text{sprav. } 1-p \end{cases}$

$\mathbb{P}(X_n = 1) = p$, $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1-p$

- $\mu(n) = \mathbb{E}X_n = 1\cdot p + 0(1-p) = p$

- $R_X(k,l) = \mathbb{E}[X_k X_l] = 1\cdot 1\cdot p^2$ pro $k \neq l$
  $= 1\cdot p$ pro $k = l$

- $C_X(k,l) = R_X(k,l) - \mu_k\mu_l = \begin{cases} p^2 - p^2 = 0; & k\neq l; \\ p - p^2 = p(1-p); & k = l. \end{cases}$

2. Důležité třídy náhodných procesů

a) Gaussovské procesy

Definice: Náhodný proces nazveme gaussovským, pokud všechna jeho konečněrozměrná rozdělení ($\dim = n$) jsou n-rozměrná gaussovská rozdělení.

$n = 1$: $\mu, \sigma^2 \in \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

density // hustota $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \cancel{f}_{\mu,\sigma^2}(x)$

μ ... střední hodnota

σ^2 ... rozptyl $= \mathbb{E}[X-\mu]^2$

$n > 1$: $\cancel{X}=(X_1, \dots, X_n)$, $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$, $\boxed{\text{i.i.d.}}$ $X \sim \mathcal{N}_n\Bigg(\underbrace{(\mu_1, \dots, \mu_n)^T}_{\mu}, \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_n^2 \end{pmatrix}}_{\Sigma}\Bigg)$

hustota $f_{\mu,\Sigma}(x) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} e^{-\frac{(x_i-\mu_i)^2}{2\sigma_i^2}}$

$= (2\pi)^{-n/2} \cdot (\det \Sigma)^{-1/2} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i-\mu_i)^2}{\sigma_i^2}\right)$

$= (2\pi)^{-n/2} \cdot (\det \Sigma)^{-1/2} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} (x-\mu)^T \Sigma^{-1} (x-\mu)\right)$

• obecně: $X = (X_1, \dots, X_n)$ má n-rozměrné gaussovské rozdělení $\mathcal{N}_n(\mu, \Sigma)$, kde $\mu \in \mathbb{R}^n$, $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ pozitivně ~~semi~~ def. tak, že

$f_X(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} (\det \Sigma)^{1/2}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^T \Sigma^{-1} (x-\mu)\right)$