Opakování • $(X_t)_{t \geq 0}$

• $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$

• Daniell-Kolmogorov … existence X

• Kolmogorov - Čentsov - spojitá verze

• $\mu_t = \mathbb{E} X_t$; $C_X(s,t) = \mathbb{E}\left[(X_s - \mu_s)\overline{(X_t - \mu_t)}\right]$; $R_X(s,t) = \mathbb{E}\left[X_s \overline{X_t}\right]$

autokovarianční funkce autokorelační

• Gaussovský vektor $X = (X_1, \dots, X_n) \sim \mathcal{N}_n(\mu, \Sigma)$

$\mu \in \mathbb{R}^n$, $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ pozitivně semidef.

$$f_X(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} (\det \Sigma)^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^T \Sigma^{-1} (x-\mu)\right)$$

18.10.2017

Pozn. • X gaussovský proces, $I_n = \{t_1, \dots, t_n\} \subset I$

$$\mu_i = \mathbb{E} X_{t_i}, \quad \mu^{I_n} = (\mathbb{E} X_{t_1}, \dots, \mathbb{E} X_{t_n})^T = (\mu_1, \dots, \mu_n)^T = \mu_X^{I_n}$$

$$C_X^{I_n} = C^{I_n} = Cov(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}), \quad (C^{I_n})_{ij} = C_X(t_i, t_j) = \mathbb{E}\left[(X_{t_i} - \mu_{t_i})\overline{(X_{t_j} - \mu_{t_j})}\right]$$

nebo v maticovým zápisu

$$C_X^{I_n} = \mathbb{E}\Big[\underbrace{\left[(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})^T - \mu_X^{I_n}\right]}_{n \times 1} \cdot \underbrace{\left[(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})^T - \mu_X^{I_n}\right]^T}_{1 \times n}\Big]$$

$$= \mathbb{E}\left[\prod_{I I_n} X - \mu\right] \cdot \left[\prod_{I I_n} X - \mu\right]^T = \mathbb{E}\left[X^{I_n} - \mu\right] \cdot \left[X^{I_n} - \mu\right]^T$$

• ekvivalentní: $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ je n-rozměrný gaussovský, pokud

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}^n: \quad \langle \alpha, X^{I_n} \rangle \sim \mathcal{N}(\langle \alpha, \mu^{I_n} \rangle, \underbrace{\langle \alpha, C^{I_n} \alpha \rangle}_{\alpha^T C^{I_n} \alpha}).$$

Příklad: • $(X_t)_{t \in I}$, $X_t \sim \mathcal{N}(0, \varepsilon^2)$ nezávislé se nazývá "bílý šum". $(\varepsilon > 0)$

• $(X_t)_{t \in I}$ je gaussovský $\overset{?}{\Longrightarrow}$

a, $Y_t = 2X_t - 1$ je gaussovský .... afinní transf. ✓

b, $Y_t = X_{t^2}$ je gaussovský ... transformace času ✓

Věta 2.1: Buď $I \neq \emptyset$ lib. množina a nechť jsou dány funkce $\mu: I \to \mathbb{C}$ a $C: I \times I \to \mathbb{C}$ pozitivně semidef. Potom ex. náhodný proces X, který je gaussovský a $\mu = \mu_X$ a $C = C_X$. Když μ a C jsou reálné, pak X lze zkonstruovat jako reálný.

Důkaz (náznak pro reálný případ) & pro C pozitivně definitní

Nechť $I_m = \{t_1, \dots, t_m\} \subset I$ je lib. a položme $\mu^{I_m} = (\mu(t_1), \dots, \mu(t_m))^T$ a

$$C^{I_m} = \begin{pmatrix} C(t_1,t_1), & \dots, & C(t_1,t_m) \\ \vdots & \ddots & \\ C(t_m,t_1), & \dots, & C(t_m,t_m) \end{pmatrix} > 0.$$

Dále def. $f_{t_1,\dots,t_m}(x_1,\dots,x_m) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2}\det(C^{I_m})^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu^{I_m})^T (C^{I_m})^{-1}(x-\mu^{I_m})\right)$

a $F_{(t_1,\dots,t_m)}(x_1,\dots,x_m) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_m} f_{t_1,\dots,t_m}(y_1,\dots,y_m)\, dy_m \dots dy_1$

Tento systém je konzistentní (Fubini) & Daniell-Kolmogorov ▨

b, Stacionární procesy: $E = \mathbb{R}$, $I = [0, +\infty)$

Definice: • Řekneme, že náhodný proces je silně stacionární,

pokud
$$F_{t_1,\dots,t_m} = F_{t_1+h,\dots,t_m+h}$$
pro každou $I_m = \{t_1,\dots,t_m\} \subset I$ a pro každé $h > 0$.

Tedy $\prod_{I_m} X \overset{\mathcal{D}}{=} \prod_{h+I_m} X$

• X je slabě stacionární, když

a, X má konečné druhé momenty: $\forall t \in I: \mathbb{E}X_t^2 < +\infty$

b, $\mu_X \equiv$ konst a $C_X(s,t) = C_X(s+h, t+h)$ pro všechna $s,t \in I$, $h > 0$.

Pozn. • $\mathbb{E}|X_t| = \mathbb{E}\,1 \cdot |X_t| \leq (\mathbb{E}\,1)^{1/2} \cdot (\mathbb{E}|X_t|^2)^{1/2} < +\infty \dots \mu_X$ je dobře def.

▨

Věta 2.2. 1, Když X je silně stacionární a má konečné druhé momenty, pak je X i slabě stacionární.

2, Když X je slabě stac. a gaussovský, pak je X i silně stac.

Důkaz: 1, Víme: $\mathbb{P}((X_{t_1},\dots,X_{t_n})\in B)=\mathbb{P}((X_{t_1+h},\dots,X_{t_n+h})\in B)$

- $\mu_X(t_1)=\mathbb{E}X_{t_1}=\int_{\mathbb{R}} x\,dF_{t_1}(x)=\int_{\mathbb{R}} x\,dF_{t_2}(x)=\mathbb{E}X_{t_2}=\mu_X(t_2)\equiv$ konst.

- $C_X(s,t)=\mathbb{E}(X_s-\mu(s))(X_t-\mu(t))=\int_{\mathbb{R}^2}(x-\mu)(y-\mu)\,dF_{s,t}(x,y)=$

$$=\int_{\mathbb{R}^2}(x-\mu)(y-\mu)\,dF_{s+h,t+h}(x,y)=\mathbb{E}(X_{s+h}-\mu)(X_{t+h}-\mu)=C(s+h,t+h).$$

2, Chceme $F_{t_1,\dots,t_n}=F_{t_1+h,\dots,t_n+h}$.

Víme $\mu^{I_n}=\mu^{I_n+h}$, $C^{I_n}=C^{I_n+h}$

$F_{t_1,\dots,t_n}$ má tedy hustotu $f_{t_1,\dots,t_n}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}(\det C^{I_n})^{1/2}}\exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu^{I_n})(C^{I_n})^{-1}(x-\mu^{I_n})\right)$

$=f_{t_1+h,\dots,t_n+h}(x)$ ... tedy stejnou jako $F_{t_1+h,\dots,t_n+h}$.

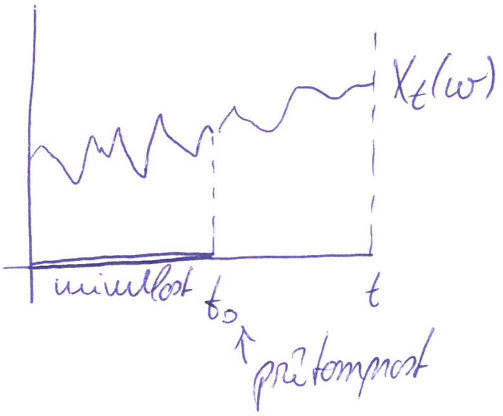
C, Markovské procesy

Definice: Buď $(X_t)_{t\in I}$ náhodný proces takový, že

(*) $\mathbb{P}(X_t\le x\mid X_s, s\le t_0)=\mathbb{P}(X_t\le x\mid X_{t_0})$ pro všechna $x\in\mathbb{R}$, a všechna $t_0\le t$.

Pak X nazveme Markovským procesem a (*) je Markovská vlastnost.

Pro určení budoucnosti (tedy X_t) není nutné znát celou minulost, tedy $X_s, s\le t_0$, stačí znát přítomnost ... tedy X_{t_0}



Speciální případ: Markovský řetězec

Proces $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ s diskrétní množinou stavů (diskrétní obor hodnot) a diskrétní v čase, který splňuje

$$\mathbb{P}(X_n=i_n \mid X_0=i_0, X_1=i_1, \dots, X_{n-1}=i_{n-1}) = \mathbb{P}(X_n=i_n \mid X_{n-1}=i_{n-1}) \quad \forall n \,\&\, \forall i_0, i_1, \dots, i_n$$

(mají-li podm. pravděpodobn. smysl)

nazveme Markovským řetězcem.

Položme:

- $p_{ij}(n) = \mathbb{P}(X_{n+1}=j \mid X_n=i)$ ... pravděpodobnost přechodu ze stavu i do stavu j v n-tém kroce.
- často nezávislá na n ("homogenní Markovův řetězec") ... p_{ij}
- Pro konečný počet stavů K položme $P=(p_{ij})_{i,j=1}^{K}$ ... matice pravděpodobností přechodu
- $\sum_{j=1}^{K} p_{ij} = \sum_{j=1}^{K} \mathbb{P}(X_1=j \mid X_0=i) = 1$ ... ze stavu $X_0=i$ je třeba přejít do právě jednoho stavu $X_1=j$, $j=1,\dots,K$
- počáteční rozdělení ... $p_i = \mathbb{P}(X_0=i)$; $i=1,\dots,K$
  $= p_i^{(0)}$ ... stejně $p_i^{(n)} = \mathbb{P}(X_n=i)$
- $p_j^{(n+1)} = \mathbb{P}(X_{n+1}=j) = \sum_{i=1}^{K} \mathbb{P}(X_n=i)\cdot \mathbb{P}(X_{n+1}=j \mid X_n=i) = \sum_{i=1}^{K} p_i^{(n)} p_{ij} = \sum_{i=1}^{K} (P^T)_{ji} p_i^{(n)}$
  $= (P^T p^{(n)})_j$

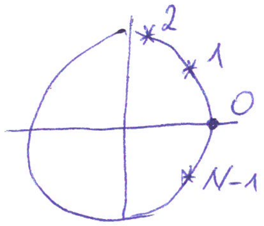
• V maticové notaci $p^{(n+1)} = P^T p^{(n)}$ ... nebo $(p^{(n+1)})^T = (p^{(n)})^T \cdot P$

... lze iterovat .... $(p^{(n)})^T = (p^{(0)})^T \cdot P^n$

Příklad: náhodná procházka na kružnici

• Množina stavů: $\{0, \dots, N-1\}$ • $\mathbb{P}(X_0 = 0) = 1$ ... $p^{(0)} = (1, 0, \dots, 0)^T$

• $X_{n+1} = X_n + \begin{cases} +1 & s\ p = 1/2 \\ -1 & s\ p = 1/2 \end{cases}$; počítáme modulo N



... pro $X_n = 0$ je $\mathbb{P}(X_{n+1} = 1) = \mathbb{P}(X_{n+1} = N-1) = 1/2$.

• Matice P:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & \cdots & \cdots & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \\ & \cdots & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & \cdots & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

• Mocniny P lze nejlépe spočítat pomocí rozkladu na vlastní čísla

$$P = U \Sigma U^T$$
$$P^2 = U \Sigma U^T U \Sigma U^T = U \Sigma^2 U^T$$
$$\vdots$$

• Stacionární rozdělení: $\pi^T = \pi^T P$.

↳ vlastní vektor příslušný vl. číslu 1

• $P - I = \begin{pmatrix} -1 & 1/2 & \cdots & 1/2 \\ 1/2 & -1 & & 0 \\ 0 & & \ddots -1 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & & 1/2 - 1 \end{pmatrix}$ je singulární

~~pro N sudé ... dva vlastní vektory~~ $\cancel{(\frac{1}{N}, 0, \frac{1}{N}, 0, \dots, \frac{1}{N}, 0) = x_1}$

~~...~~ $\cancel{\& \ (0, \frac{2}{N}, 0, \frac{2}{N}, \dots, 0, \frac{2}{N}) = x_2}$

~~(a jejich lin. kombinace ...~~ $\cancel{Px_1 = Px_2,\ Px_2 = Px_1 \dots P(\frac{x_1 + x_2}{2}) = (\frac{x_1 + x_2}{2}}$

pro N ~~liché~~ sudé ... jeden vlastní vektor $(\frac{1}{N}, \frac{1}{N}, \frac{1}{N}, \dots, \frac{1}{N})$

Wienerův proces (a.k.a. Brownův pohyb)

Definice: Náhodný proces $(W_t)_{t\geq 0}$ je Wienerův proces, pokud platí

1, $W_0 = 0$, $\mathbb{P}$-s.j.

2, W má nezávislé přírůstky, tj

$\forall I_{n+1} = \{t_0, \dots, t_n\}$ s $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ jsou

$W_{t_1} - W_{t_0}, W_{t_2} - W_{t_1}, \dots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ nezávislé náhodné veličiny.

3, $W_t - W_s \overset{\mathcal{D}}{=} \mathcal{N}(0, \sigma^2(t-s))$ $\forall t \geq s$

4, W má skoro všechny trajektorie spojité ... $t \to W_t(\omega)$ je spojitá pro $\mathbb{P}$-s.v. ω

Pozn.: • Body 2 & 3 se dají oslabit:

W má nezávislé a silně stacionární přírůstky

$(W_{t+h} - W_{s+h} \overset{\mathcal{D}}{=} W_t - W_s)$

- gaussovskost pak plyne z centrální limitní věty (CLT)

$$W_t - W_s = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})}_{\text{součet nez. náhodných veličin}} \quad \dots s = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t,\ t_i - t_{i-1} = \text{konst.}$$

• Bod 4 v definici plyne z Kolmogorov-Čenzov:

$$\mathbb{E}|W_t - W_s|^\alpha \leq |t-s|^{1+\beta} \cdot c$$

$\alpha = 4$: $\mathbb{E}|W_t - W_s|^4 = \left\{ \begin{matrix} W_t - W_s = \sigma\sqrt{t-s} \cdot Z \\ Z \sim \mathcal{N}(0,1) \end{matrix} \right\} = \mathbb{E}[\sigma^4 (t-s)^2 Z^4]$

$$= \sigma^4 (t-s)^2 \underbrace{\mathbb{E} Z^4}_{=3} = 3\sigma^4 (t-s)^2 \quad \dots \alpha = 4, \beta = 1, c = 3\sigma^4$$

$$\left(\mathbb{E} Z^4 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t^4 e^{-t^2/2} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t e^{-t^2/2} \cdot t^3 dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-e^{-t^2/2} t^3 \right]_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} \cdot 3t^2 dt = 0 + 3\mathbb{E} Z^2 = 3 \right)$$

Opakování

- Gaussovské procesy
  - konečně rozměrná rozdělení jsou gaussovská

- Stacionární procesy
  - silně: $F_{t_1,\dots,t_n} = F_{t_1+h,\dots,t_n+h}$
  - slabě: $\mu_X \equiv konst.$, $C_X(s,t) = C_X(s+h,t+h)$

- Markovské procesy
  - $\mathbb{P}(X_t \leq x \mid X_s, s \leq t_0) = \mathbb{P}(X_t \leq x, X_{t_0}) \dots t_0 \leq t$
  - Markovský řetězec: diskrétní stavy, diskrétní časy

- Wienerův proces

  nezávislé přírůstky $\underbrace{W_{t_1} - W_{t_0}}, W_{t_2} - W_{t_1}, \dots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$.

  $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2(t-s))$

  $\dots \sigma \equiv 1 \dots$ standardní

- Pro $\sigma = 1$: standardní Wienerův proces
- typicky: Brownův pohyb je spojitá verze Wienerova procesu

Existence: konstrukce pomocí Daniell-Kolmogorovy věty 25.10.2017

Wienerův proces jako model difúze

- částice se za čas $\delta > 0$ posune náhodně o $\varepsilon > 0$ doleva nebo doprava
  - n časových kroků
  - N - počet kroků doprava, $n-N$ doleva
  - $X(n\delta) = N \cdot \varepsilon - (n-N)\varepsilon = 2N\varepsilon - n\varepsilon$ ... Binomické rozdělení
  - $\mathbb{E}\, X(n\delta) = 2 \underbrace{\mathbb{E} N}_{\sim \frac{n}{2}} \cdot \varepsilon - n\varepsilon = 0$
  - $\mathrm{Var}(X(n\delta)) = \cancel{\varepsilon^2 \mathrm{Var}(Bi(n, 1/2)) = \varepsilon^2} = \mathbb{E}(2N\varepsilon - n\varepsilon)^2 = 4\varepsilon^2 \mathbb{E}\left(N - \frac{n}{2}\right)^2 = 4\varepsilon^2 \overbrace{\mathrm{Var}(N)}^{n/4} = n\varepsilon^2.$

$$\cancel{= \mathbb{E}\{2N\varepsilon - n\varepsilon\}^2 = \mathbb{E}\{4N^2\varepsilon^2 - 4Nn\varepsilon^2 + n^2\varepsilon^2\} = 4\varepsilon^2\{\mathbb{E}N^2 + \tfrac{n^2}{4}\}}$$

$$\cancel{= 4\varepsilon^2 \mathbb{E}\left(N - \tfrac{n}{2}\right)^2 = 4\varepsilon^2 \underbrace{\mathrm{Var}(N)}_{= \frac{n}{4}} = \varepsilon^2 n}$$

- přechod do spojitého času

$\forall t \geq 0$: $X(t) := X(\lfloor \frac{t}{\delta} \rfloor \cdot \delta)$, $\mathbb{E}\, X(t) = 0$, $\mathrm{Var}\, X(t) = \varepsilon^2 \cdot \lfloor \frac{t}{\delta} \rfloor$.

- limitní přechod ... $\lfloor \frac{t}{\delta} \rfloor \sim \frac{t}{\delta}$

$$\mathrm{Var}\, X(t) = \begin{cases} +\infty \\ 0 \\ \text{konst.} \quad \varepsilon^2 = \sigma^2 \cdot \delta \ \dots \ \mathrm{Var}\, X(t) = \sigma^2 t \end{cases}$$

- „průměrná rychlost difúzní částice": $v = \frac{s}{t} = \frac{\varepsilon}{\delta} = \frac{\sigma\sqrt{\delta}}{\delta} = \frac{\sigma}{\sqrt{\delta}} \xrightarrow{\delta \to 0_+} +\infty$

Věta: Buď W standardní Wienerův proces. Pak platí

1, W je gaussovský proces s $\mu_t = \mathbb{E} W_t = 0$ (centrovaný) $\forall t$

$C_W(s,t) = \min\{s,t\}$ $\forall s,t \geq 0$

2, konečněrozměrné hustoty jsou tvaru

$$f_{t_1,\dots,t_n}(x_1,\dots,x_n) = f_{t_1}(x_1) \prod_{j=2}^{n} f_{t_j - t_{j-1}}(x_j - x_{j-1}), \text{ kde}$$

$$f_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{t}\right\}.$$

Důkaz: • Chceme: $(W_{t_1}, W_{t_2}, \dots, W_{t_n})$ je gaussovský

$t_0 = 0$

$$\begin{pmatrix} W_{t_1} \\ \vdots \\ W_{t_n} \end{pmatrix} = Z_n = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 1 & & & 1 \end{pmatrix}}_{A_n} \underbrace{\begin{pmatrix} W_{t_1} - W_{t_0} \\ W_{t_2} - W_{t_1} \\ \vdots \\ W_{t_n} - W_{t_{n-1}} \end{pmatrix}}_{Y_n}$$

Y_n je gaussovský vektor s nezávislými složkami, $Z_n = A_n Y_n$

Z_n je lineární transformací gaussovského vektoru $\Rightarrow Z_n$ je gauss.

$\Rightarrow W$ je gauss.

• $\mathbb{E} W_t = \mathbb{E}(\underbrace{W_t - W_{t_0}}_{\sim N(0,t)}) = 0 \quad \dots \quad W_t \sim N(0,t)$

• $R_W(s,t) = \mathbb{E}(W_s W_t) = \mathbb{E}[\underbrace{(W_t - W_s) W_s}_{\text{nezávislé}}] + \mathbb{E}[W_s^2] = \mathbb{E} W_s^2 = \operatorname{Var}(W_s) = s =$

$= \min(s,t) = C_W(s,t)$.

• Známe hustotu Y_n, $Z_n = A_n Y_n$ & věta o transformaci hustoty

$$\mathbb{P}(Z_n \in B) = \mathbb{P}(A_n Y_n \in B) = \mathbb{P}(Y_n \in A_n^{-1}(B)) = \int_{A_n^{-1}(B)} f_Y(y)\,dy$$

$z = A_n y$, $dz = \underbrace{(\det A_n)}_{=1} dy$

$$= \int_B \underbrace{f_Y(A_n^{-1} z)}_{\text{chceme } "f_Z(z)"} dz \quad \dots \quad A_n^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \dots A_n^{-1}\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 - \overbrace{z_0}^{=0} \\ z_2 - z_1 \\ \vdots \\ z_n - z_{n-1} \end{pmatrix}$$

$\dots f_Z = f_Y \circ A_n^{-1}$

$$f_Y(y)=\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi(t_j-t_{j-1})}}\exp\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{y_j^2}{t_j-t_{j-1}}\right)$$

a tedy $f_Z(z)=f_Y(z_1-z_0,z_2-z_1,\dots,z_n-z_{n-1})=\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi(t_j-t_{j-1})}}\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(z_j-z_{j-1})^2}{t_j-t_{j-1}}\right)$ $\boxtimes$

Věta: (Markovská vlastnost)

Buď W standardní Wienerův proces. Pak platí

1, $\forall t\geq 0$ $\forall 0<h_1<h_2<\dots<h_n$ platí

$(W_{t+h_1}-W_t,\dots,W_{t+h_n}-W_t)$ je nezávislé na $(W_s)_{s\leq t}$.

2, Pro $t_0\geq 0$ libovolné je

$(\tilde{W}_t)_{t\geq 0}=(W_{t+t_0}-W_{t_0})_{t\geq 0}$ opět standardní Wienerův proces (tzv. restartovaný Wienerův proces v čase t_0).

Důkaz: 2, stačí ověřit definici

- $\tilde{W}_{0}=W_{t_0}-W_{t_0}=0$
- $(\tilde{W}_{t_1},\tilde{W}_{t_2}-\tilde{W}_{t_1},\dots,\tilde{W}_{t_n}-\tilde{W}_{t_{n-1}})=(W_{t_1+t_0}-W_{t_0},W_{t_2+t_0}-W_{t_0}-W_{t_1+t_0}+W_{t_0},\dots)$

  $=(W_{t_1+t_0}-W_{t_0};W_{t_2+t_0}-W_{t_1+t_0};\dots)$ nezávislé přírůstky W.
- $\tilde{W}_t-\tilde{W}_s=W_{t_0+t}-W_{s+t_0}\overset{\mathcal{D}}{=}N(0,t-s)$
- spojité trajektorie ... $t\to\tilde{W}_t=W_{t+t_0}-W_{t_0}$ ... spojitá

1, Pro $Y_n=(W_{t+h_1}-W_t,W_{t+h_2}-W_{t+h_1},\dots,W_{t+h_n}-W_{t+h_{n-1}})^T$ a

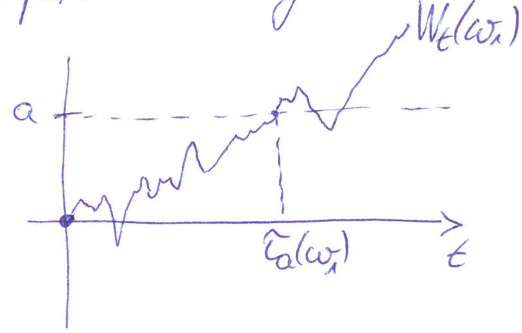
$Z_n=(W_{t+h_1}-W_t,\dots,W_{t+h_n}-W_t)$ je opět $Z_n=A_nY_n$.

Y_n jsou nezávislé na $(X_s)_{s\leq t}$ a tedy i Z_n.

Cvičení: • Pomocí generátoru náhodných čísel vyrobte jednu realizaci $(W_0,W_1,\dots,W_{100})$

• K této realizaci vyrobte „zjemnění" $(W_0,W_{1/2},W_1,W_{3/2},\dots,W_{100})$.

Čas prvního dotyku:



globální charakteristika W

$$\tau_a := \inf\{t \geq 0 : W_t \geq a\} \in [0, \infty], \quad a > 0$$

čas prvního dotyku úrovně a (first passage time, hitting time)

τ_a: náhodná veličina

Věta: Náhodná veličina τ_a má hustotu pravděpodobnosti

$$f_{\tau_a}(x) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}\, x^{3/2}} \exp\left(-\frac{a^2}{2x}\right), \quad x \geq 0$$

… Lévyho distribuce (Waldova distribuce) (speciální případ inverzního gauss. rozdělení).

Důkaz: • Položme $M_t^W := \max_{s \in [0,t]} W_s$ pro $\forall t \geq 0$ (dobře definované!)

• Pozorování $\{\omega : \tau_a(\omega) > t\} = \{\omega : M_t^W < a\}$ … & $\{\omega : \tau_a(\omega) \leq t\} = \{\omega : M_t^W \geq a\}$

• $$F_{\tau_a}(t) = \mathbb{P}(\tau_a \leq t) = \mathbb{P}(M_t^W \geq a) = \underbrace{\mathbb{P}(M_t^W \geq a, W_t \leq a)}_{I_1} + \underbrace{\mathbb{P}(M_t^W \geq a, W_t > a)}_{II_1} \quad (*)$$

II_1: $W_t > a \Rightarrow M_t^W \geq a$ … $II_1 = \mathbb{P}(W_t > a)$

$$I_1 = \mathbb{P}(M_t^W \geq a, W_t \leq W_{\tau_a}) = \mathbb{P}(M_t^W \geq a, W_t - W_{\tau_a} \leq 0) =$$

Wiener symetrický okolo 0; $\tau_a < t$, $t = \tau_a + s$, $s > 0$; $B_s := W_{s+\tau_a} - W_{\tau_a}$ opět Wiener

$$= \mathbb{P}(M_t^W \geq a, W_t \geq a) = II_1$$

• Celkem tedy $(*) = 2\mathbb{P}(W_t > a) = 2\int_a^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2t}\right\} dx = \begin{bmatrix} y = \frac{x}{\sqrt{2t}} \\ dy = \frac{dx}{\sqrt{2t}} \end{bmatrix}$

$\mathbb{P}(W_t = a) = 0$

$$= 2\int_{\frac{a}{\sqrt{2t}}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\{-y^2\}\, dy.$$

- Konečně $f_a(t) = \frac{d}{dt} F_{\tau_a}(t) = \frac{d}{dt} \mathbb{P}(\tau_a \leq t) =$

$$= \frac{-\cancel{2}}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{a^2}{2t}\right) \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \frac{-\cancel{1/2}}{t^{3/2}} = \frac{a}{\sqrt{2\pi}\, t^{3/2}} \exp\left(-\frac{a^2}{2t}\right), \ t \geq 0. \ \blacksquare$$

Pozn. • Reflektovaný Wienerův proces

$$\tilde{W}_t(\omega) = \begin{cases} W_t(\omega), & t \leq \tau_a(\omega) \\ a - (W_t(\omega) - a) = 2a - W_t(\omega), & \text{pro } \tau_a(\omega) < t. \end{cases}$$

Lze ukázat, že $(\tilde{W}_t)_{t \geq 0}$ je opět Wienerův proces

- Poznámka:
  - $\underset{\displaystyle \mathbb{P}(\max_{s \in [0,t]} W_s \geq a)}{\mathbb{P}(\tau_a \leq t)} = 2\mathbb{P}(W_t > a) = \mathbb{P}(|W_t| > a)$
  - $W_t \sim \mathcal{N}(0, \overset{=1}{\sigma^2} \cdot t) = \mathcal{N}(0, t)$

$$\mathbb{P}(\tau_a \leq t) = 2\mathbb{P}(W_t > a) = 2\mathbb{P}(\sqrt{t}\, Z > a) = 2\mathbb{P}(Z > a/\sqrt{t})$$

$$= 2(1 - \mathbb{P}(Z \leq a/\sqrt{t})) = 2(1 - \phi(a/\sqrt{t}))$$

$t \to +\infty \ \ldots \ \lim_{t \to +\infty} \mathbb{P}(\tau_a \leq t) = \mathbb{P}(\tau_a < +\infty) = 2(1 - \underbrace{\phi(0)}_{1/2}) = 1.$

$\tau_a < +\infty$ skoro jistě.

  - $\mathbb{E}\tau_a = \int_0^\infty \underbrace{x \cdot \frac{a}{\sqrt{2\pi}\, x^{3/2}}}_{\sim x^{-1/2}} \underbrace{e^{-\frac{a^2}{2x}}}_{\substack{\sim 1 \\ x \to +\infty}} dx = +\infty$

Opakování

- $(W_t)_{t \geq 0}$ - Wienerův proces
- gaussovský, markovův proces
- τ_a, $a > 0$ ... čas prvního dotyku, globální charakteristika
  - inverzní funkce
- $\tau_a = \inf\{t \geq 0, W_t \geq a\}$ ... τ_a má rozložení f_{τ_a} ... Waldovo distr.
  hustotu

- Variace funkce

Vlastnosti trajektorií

- existuje spojitá verze

Variace funkce: $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $t > 0$. Označme

$$\Delta_t^m = \{t_i^{(m)} : 0 = t_0^{(m)} < t_1^{(m)} < \dots < t_m^{(m)} = t\}$$

dělení intervalu $[0,t]$. Norma dělení je

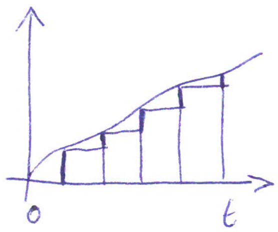
$$\|\Delta_t^m\| := \max_{1 \le i \le m} |t_i^{(m)} - t_{i-1}^{(m)}| \quad \dots = \max_{1 \le i \le m} |t_i - t_{i-1}|$$

Definice: Nechť pro každou posloupnost dělení $(\Delta_t^m)_{m \in \mathbb{N}}$ intervalu $[0,t]$ takovou, že $\|\Delta_t^m\| \xrightarrow[m \to +\infty]{} 0$, existuje konečná $\lim_{\|\Delta_t^m\| \to 0} \sum_{t_i \in \Delta_t^m} |f(t_i) - f(t_{i-1})|^p$, $p > 0$. Pak řekneme, že funkce f má na intervalu $[0,t]$ konečnou p-variaci; značíme $V_t^p(f)$ ... společná hodnota těchto limit.

Speciálně: • $p = 1 \Rightarrow V_t^1(f)$ se nazývá totální variace funkce, $|||f|||_{[0,t]}$

• $|||f|||_{[0,t]} = \sup_{m, \Delta_t^m} \sum_{t_i \in \Delta_t^m} |f(t_i) - f(t_{i-1})|.$

Význam totální variace



... $|||f|||$, dráha projekce bodu $(x, f(x))$ na y-souřadnici

Pro $f \in C^1$: $\sum_{t_i \in \Delta_t^m} \frac{|f(t_i) - f(t_{i-1})|}{|t_i - t_{i-1}|} \cdot |t_i - t_{i-1}| \to \int_0^t |f'(s)|\,ds$

... srovnejte s délkou grafu funkce: $\int_0^t \sqrt{1 + f'(s)^2}\,ds$

proj. na osu x

Konvergence ve statistice

- Nechť $(X_n)_{n\geq 0}$ je posloupnost náhodných proměnných. Řekneme, že X_n konvergují k X v pravděpodobnosti, $X = \mathbb{P}\text{-}\lim_{n\to\infty} X_n$, pokud pro každé $\varepsilon > 0$: $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$
- Konvergence skoro jistě: $\mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} X_n = X) = 1$
- Konvergence v L_p-normě: $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}|X_n - X|^p = 0$

$$\begin{array}{ccc} \xrightarrow{L_2} & \Rightarrow & \xrightarrow{L_1} \\ & & \Downarrow \\ \xrightarrow{a.e.} & \Rightarrow & \xrightarrow{\mathbb{P}} \end{array}$$

Definice: Buď $(X_t)_{t\geq 0}$ náhodný proces a nechť pro každou posl. dělení $(\Delta_t^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\|\Delta_t^n\| \xrightarrow{n\to+\infty} 0$ intervalu $[0,t]$ existuje limita

$$\langle X\rangle_t := \mathbb{P}\text{-}\lim_{\|\Delta_t^n\|\to 0} \sum_{t_i\in\Delta_t^n} |X(t_i) - X(t_{i-1})|^2.$$

Tato limita se nazývá kvadratická variace $(X_t)_{t\geq 0}$, ~~ozn.~~
ozn. $\langle X\rangle = (\langle X\rangle_t)_{t\geq 0}$.

Věta: Buď W standardní Wienerův proces. Pak $\langle W\rangle_t = t$, $\forall t \geq 0$.

Důkaz: Z L_2-konvergence plyne $\mathbb{P}$-konvergence

Stačí tedy $$\mathbb{E}\Big|\sum_{t_i} |W_{t_i} - W_{t_{i-1}}|^2 - \underset{\sum_{t_i}(t_i - t_{i-1})}{\underset{\parallel}{t}}\Big|^2 \xrightarrow[\|\Delta_t^n\|\to 0]{} 0$$

Tedy: $\mathbb{E}\left|\sum_{t_i}\{|W_{t_i}-W_{t_{i-1}}|^2-\underbrace{(t_i-t_{i-1})}_{=\mathbb{E}|W_{t_i}-W_{t_{i-1}}|^2}\}\right|^2 = \left| Y_i := |W_{t_i}-W_{t_{i-1}}|^2 \right|$

$$= \mathbb{E}\left|\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\mathbb{E}Y_i)\right|^2 = \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(Y_i-\mathbb{E}Y_i)^2}_{I,} + \underbrace{2\sum_{1\le i<j\le n}\mathbb{E}[(Y_i-\mathbb{E}Y_i)(Y_j-\mathbb{E}Y_j)]}_{II,} \quad (*)$$

Dále upravíme

$$I, = \sum_i \mathbb{E}[Y_i^2-2Y_i\mathbb{E}Y_i+(\mathbb{E}Y_i)^2] = \sum_i \mathbb{E}[Y_i]^2-[\mathbb{E}Y_i]^2$$

$$W_{t_i}-W_{t_{i-1}} \simeq \sqrt{t_i-t_{i-1}}\cdot Z_i,\ Z_i \sim N(0,1)$$

$$Y_i \simeq (t_i-t_{i-1})\cdot Z_i^2$$

$$= \sum_i (t_i-t_{i-1})^2\mathbb{E}[Z_i^4]-(t_i-t_{i-1})^2[\mathbb{E}Z_i^2]^2 = \sum_i (t_i-t_{i-1})^2\{3-1\} = \sum_i 2(t_i-t_{i-1})^2$$

$II,$ Y_i, Y_j jsou nezávislé $\mathbb{E}[(Y_i-\mathbb{E}Y_i)(Y_j-\mathbb{E}Y_j)] = \mathbb{E}(Y_i-\mathbb{E}Y_i)\cdot\mathbb{E}(Y_j-\mathbb{E}Y_j) = 0$

Celkem $(*) = 2\sum_i (t_i-t_{i-1})^2 \le 2\|\Delta_t^n\|\underbrace{\sum_{i=1}^{n}|t_i-t_{i-1}|}_{=t} = 2t\|\Delta_t^n\| \xrightarrow{\|\Delta_t^n\|\to 0} 0$

Tedy $L^2\text{-}\lim \sum_{t_i}|W_{t_i}-W_{t_{i-1}}|^2 = t$, tedy i $\mathbb{P}$-lim. ∎

Důsledek: $|||W_t|||_{[0,t]} = +\infty$ skoro jistě.

Důkaz: sporem: Nechť $|||W|||_{[0,t]} < +\infty$

pak $\sum_i |W_{t_i}-W_{t_{i-1}}|^2 \le \underbrace{\sup_i |W_{t_i}-W_{t_{i-1}}|}_{\downarrow\ 0} \cdot \underbrace{\sum_i |W_{t_i}-W_{t_{i-1}}|}_{\le |||W|||_{[0,t]}}$

pro $\|\Delta_t^n\|\to 0$ ... stejnoměrná spojitost trajektorií $(W_t)_{t\ge 0}$

↳ Pro trajektorie s $|||W|||_{[0,t]} < +\infty$ platí $\lim_{\substack{n\to\infty \\ \|\Delta_t^n\|\to 0}} \sum_i |W_{t_i}-W_{t_{i-1}}|^2 = 0$.

Závěr $|||W|||_{[0,t]} = +\infty$ skoro jistě má nepříjemné důsledky!

↳ není možné snadno definovat integrál Wienerova procesu

$$\int_0^s f(s)\,dW_s$$

- Má-li funkce g konečnou variaci, pak lze definovat
  - Riemann-Stieltjesův integrál
    $$\int_a^b f\,dg(x): \text{ sumy } \sum_{i=0}^{n-1} f(c_i)[g(t_i)-g(t_{i-1})] \quad t_{i-1} < c_i < t_i$$
  - Lebesgue-Stieltjesův integrál
    $\int_a^b f\,dg(x)$:
    - Funkci s konečnou variací lze napsat jako rozdíl dvou monotónních (neklesajících) funkcí ... $g(x) = g_+(x) - g_-(x)$
    - $\mu_g^+([s,t)) = g_+(t) - g_+(s) \geq 0$
      $\mu_g^-([s,t)) = g_-(t) - g_-(s) \geq 0$ dvě nezáp. míry

$$\int_a^b f\,dg(x) = \int_a^b f\,d\mu_g^+(x) - \int_a^b f\,d\mu_g^-(x).$$

Další vlastnosti wienerovských trajektorií

1, Wienerovské trajektorie skoro jistě nejsou diferencovatelné v žádném bodě $t \geq 0$. ... $\frac{W_{t+h} - W_t}{h} \sim N(0, \frac{1}{h}) \xrightarrow[h \to 0]{}$ ... lim. neexistuje

2, Trajektorie nejsou monotónní na žádném intervalu $[t, t+\varepsilon)$

3, Na každém intervalu $[t, t+\varepsilon)$ nekonečněkrát mění znaménko.

Věta (bez důkazu) $\lim_{t \to +\infty} \frac{W_t}{t} = 0$, $\mathbb{P}$-s.j.

Wienerův proces s driftem

Definice: Mějme $(W_t)_{t\geq 0}$ standardní W.p., $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$.

Položme $Y_t = \mu t + \sigma W_t$, $t \geq 0$. Pak $(Y_t)_{t\geq 0}$ nazýváme Wienerův proces s driftem.

Platí:
- $\mathbb{E} Y_t = \mu t$, $\operatorname{Var} Y_t = \sigma^2 t$, $Y_0 = 0$ skoro jistě.
- Y_t je gaussovský proces
- limita nesymetrické náhodné procházky
- σ: "difuzní koeficient"