Poissonův proces

Definice: • Poissonovo rozdělení: $\mathbb{P}\{N=n\} = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$; $\lambda > 0$ parametr

... $Poi(\lambda)$

• Řekneme, že náhodný proces $(N_t)_{t\geq 0}$ je (homogenní) Poissonův proces s intenzitou $\lambda>0$, pokud platí

1, $N_0 = 0$ skoro jistě

2, $(N_t)_{t\geq 0}$ má nezávislé přírůstky, tj. $\forall 0<t_1<t_2<\ldots<t_n$

$N_{t_1}, N_{t_2}-N_{t_1}, \ldots, N_{t_n}-N_{t_{n-1}}$ jsou nezávislé náhodné veličiny

3, $\forall t\geq s$: $N_t - N_s \overset{\mathcal{D}}{\sim} Poi(\lambda(t-s))$

4, Skoro všechny trajektorie $(N_t)_{t\geq 0}$ jsou zprava spojité a ex. limita zleva

Pozn: • $N_t = N_t - N_0 \sim Poi(\lambda t)$

• $\lambda = 1$... standardní Poissonův proces

• homogenní ... λ nezávisí na čase

• N_t... náhodný počet příchodů událostí do času t včetně.

... homogenní ... intenzita příchodů se nemění v čase

• Existence: Daniell-Kolmogorov

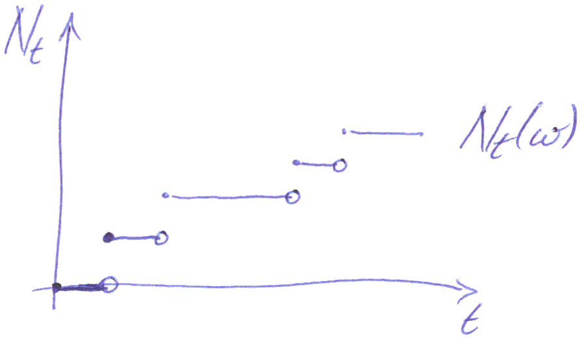
$$f_{t_1,\ldots,t_n}(k_1,\ldots,k_n) = e^{-\lambda t_n} \frac{(\lambda t_1)^{k_1}}{k_1!} \frac{(\lambda(t_2-t_1))^{k_2}}{(k_2-k_1)!} \cdots \frac{(\lambda(t_n-t_{n-1}))^{k_n}}{(k_n-k_{n-1})!}$$

$k_1 \leq k_2 \leq \ldots \leq k_n$, $k_i \in \mathbb{N}_0$ sdružená hustota (později)

$0<t_1<t_2<\ldots<t_n$

• Přírůstky jsou stacionární $N_t - N_s \overset{D}{\sim} N_{t+h} - N_{s+h}$, $h > 0$.

• Trajektorie



… trajektorie jsou po částech konstantní & neklesající!

• $X_i \sim Poi(\alpha_i)$, nezávislé, $\alpha = \sum_i \alpha_i$. Pak $\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \sim Poi(\alpha)$.

Věta: Buď $(N_t)_{t \geq 0}$ homogenní Poissonův proces s intenzitou $\lambda > 0$. Pak

1, $\mathbb{E} N_t = \lambda t = Var N_t$

2, $C_N(t,s) = \lambda \min(s,t)$

Důkaz: 1, $\mathbb{E} N_t = \sum_{n=0}^{\infty} n \, \mathbb{P}(N_t = n) = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} = e^{-\lambda t} (\lambda t) \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}}_{e^{\lambda t}} = \lambda t.$

2, $$\mathbb{E} N_t^2 = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 \, \mathbb{P}(N_t = n) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{(n-1)!}$$

$$= e^{-\lambda t} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{(\lambda t)^{n+1}}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{n+1}}{n!} \right\} = e^{-\lambda t} \left\{ (\lambda t)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} + \right.$$

$$\left. + (\lambda t) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \right\} = (\lambda t)^2 + \lambda t$$

$Var(N_t) = \mathbb{E} N_t^2 - (\mathbb{E} N_t)^2 = (\lambda t)^2 + \lambda t - (\lambda t)^2 = \lambda t$

nezávislé

3, $\underset{s<t}{C_N(s,t)} = \mathbb{E}[N_s N_t] - [\mathbb{E} N_s][\mathbb{E} N_t] = \mathbb{E}[(N_t - N_s) N_s] + \mathbb{E} N_s^2 - (\mathbb{E} N_s)(\mathbb{E} N_t)$

$= \lambda(t-s) \lambda s + (\lambda s)^2 + \lambda s - \lambda s \lambda t = \lambda s \{ \lambda t - \lambda s + \lambda s + 1 - \lambda t \} = \lambda s.$

Příklad: Rozchody celebrit ... ~ Poissonův proces s $\lambda = 2$, t = čas v týdnech.

N_t ... počet rozchodů v intervalu $[0,t]$

a) $\mathbb{P}$(v čase $t_0 \geq 2$ už dva týdny nedošlo k rozchodu)

$$= \mathbb{P}(N_{t_0} - N_{t_0-2} = 0) = \mathbb{P}(N_2 - \underbrace{N_0}_{=0} = 0) = e^{-(2\lambda)} \cdot \frac{(2\lambda)^0}{0!} = e^{-4}.$$

b) $\mathbb{P}$(v následujících dvou dnech nebude rozchod)

$$\mathbb{P}(N_{t_0+2/7} - N_{t_0} = 0) = \mathbb{P}(N_{2/7} = 0) = e^{-2\lambda/7} = e^{-4/7}.$$

Věta: (Markovská vlastnost)

N je markovský proces, tj. $\forall\, 0 < t_1 < \ldots < t_n < t$ a $\forall\, k_1 \leq k_2 \leq \ldots \leq k_n$, $k_i \in \mathbb{N}_0$

platí $$\mathbb{P}[N_t = l \mid N_{t_1} = k_1, \ldots, N_{t_n} = k_n] = \mathbb{P}(N_t = l \mid N_{t_n} = k_n) \ldots \forall l \in \mathbb{N}_0.$$

Důkaz: $$\mathbb{P}(N_t = l \mid N_{t_1} = k_1, \ldots, N_{t_n} = k_n) \overset{\text{def.}}{=} \frac{\mathbb{P}(N_t = l, N_{t_1} = k_1, \ldots, N_{t_n} = k_n)}{\mathbb{P}(N_{t_1} = k_1, \ldots, N_{t_n} = k_n)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(N_{t_1} = k_1, N_{t_2} - N_{t_1} = k_2 - k_1, \ldots, N_{t_n} - N_{t_{n-1}} = k_n - k_{n-1}, N_t - N_{t_n} = l - k_n)}{\mathbb{P}(N_{t_1} = k_1, N_{t_2} - N_{t_1} = k_2 - k_1, \ldots, N_{t_n} - N_{t_{n-1}} = k_n - k_{n-1})}$$

$$\underset{\text{součin \& zkrátit}}{\overset{\text{nezávislé}}{=}} \mathbb{P}(N_t - N_{t_n} = l - k_n).$$

Stejně $$\mathbb{P}(N_t = l \mid N_{t_n} = k_n) = \frac{\mathbb{P}(N_t = l, N_{t_n} = k_n)}{\mathbb{P}(N_{t_n} = k_n)} = \frac{\mathbb{P}(N_{t_n} = k_n, N_t - N_{t_n} = l - k_n)}{\mathbb{P}(N_{t_n} = k_n)}$$

$$\overset{\text{nez.}}{=} \mathbb{P}(N_t - N_{t_n} = l - k_n). \qquad \blacksquare$$

Věta (Sdružené rozdělení) Pro N Poissonův proces, $0 < t_1 < \dots < t_n$, $0 \le k_1 \le k_2 \le \dots \le k_n$ platí

$$\mathbb{P}(N_{t_1} = k_1, N_{t_2} = k_2, \dots, N_{t_n} = k_n) = \mathbb{P}(N_{t_1} - N_{t_0} = k_1 - k_0, N_{t_2} - N_{t_1} = k_2 - k_1, \dots, N_{t_n} - N_{t_{n-1}} = k_n - k_{n-1})$$

$$= e^{-\lambda(t_1 - t_0)} \frac{[\lambda(t_1 - t_0)]^{k_1 - k_0}}{(k_1 - k_0)!} \cdot \ldots \cdot e^{-\lambda(t_n - t_{n-1})} \frac{[\lambda(t_n - t_{n-1})]^{k_n - k_{n-1}}}{(k_n - k_{n-1})!}$$

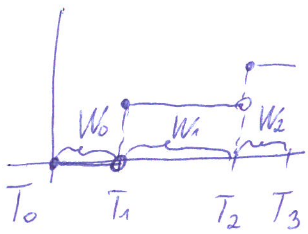
$$= e^{-\lambda t_n} \prod_{j=1}^{n} \frac{[\lambda(t_j - t_{j-1})]^{k_j - k_{j-1}}}{(k_j - k_{j-1})!} = e^{-\lambda t_n} \lambda^{k_n} \prod_{j=1}^{n} \frac{(t_j - t_{j-1})^{k_j - k_{j-1}}}{(k_j - k_{j-1})!}.$$

Poissonův proces jako čítací proces

15. 11. 2017

Nechť $N = (N_t)_{t \ge 0}$ je homogenní Poissonův proces s intenzitou $\lambda > 0$

Položme $T_0 = 0$, $T_n := \inf\{t > T_{n-1} : N_t = n\}$, $n \in \mathbb{N}$



T_n: čas příchodu n-té události

$W_n := T_{n+1} - T_n$

... doba strávená na hladině n, náhodná doba čekání

- $T_n = \sum_{i=0}^{n-1} W_i$, $T_n(\omega) = +\infty$ ... k n-té události nikdy nedošlo

$$N_{T_n} = \begin{cases} n : T_n < +\infty \\ 0 : T_n = +\infty \end{cases}$$

- Pozorování: $N_t \ge n \iff T_n \le t$.

Věta: Při tomto označení platí

1, $(W_i)_{i=0}^{\infty}$ je posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných proměnných s rozdělením $Exp(\lambda)$

2, $T_n \overset{\mathcal{D}}{\sim} \Gamma(n,\lambda)$ $\left[\begin{array}{l} \underline{X \sim Exp(\lambda)}: f_X(z) = \lambda e^{-\lambda z}, z \geq 0 \ \& \ f_X(z) = 0, z < 0 \\ \underline{X \sim \Gamma(n,\lambda)}: f_X(z) = \frac{\lambda^n \cdot z^{n-1} e^{-\lambda z}}{\Gamma(n)}, \ z > 0. \end{array} \right.$

Důkaz: • $i=0$: $\mathbb{P}(W_0 > t) = \mathbb{P}(N_t = 0) = e^{-\lambda t}$ .... $F_{W_0}(s) = 1 - \mathbb{P}(W_0 > s)$

$= 1 - e^{-\lambda s}$

$F_{W_0}(s)' = \lambda e^{-\lambda s}$.

• vyšší i: intuitivní postup

$$\mathbb{P}(W_i > s) = \mathbb{P}(N_{T_i + s} - N_{T_i} = 0) = \mathbb{P}(N_s = 0) = e^{-\lambda s}$$

- N má invariantní přírůstky, ale pro pevné časy!

$N_{t+h} - N_{s+h} \sim N_t - N_s$ ... $t,s,h > 0$ pevné (deterministické)

• $\mathbb{P}(W_i > s) = \int_0^{\infty} \mathbb{P}(W_i > s \mid T_i = t) \, dS_i(t)$, kde • S_i ... dist. funkce T_i

$$\mathbb{P}(W_i > s \mid T_i = t) = \lim_{h \to 0^+} \mathbb{P}(W_i > s \mid t - h < T_i \leq t)$$

$\parallel$

$$\mathbb{P}(\underbrace{N_{t+s} - N_t}_{\text{závisí jen na } (N_u)_{u \geq t}} = 0 \mid \underbrace{T_i = t}_{\text{závisí jen na } (N_u)_{0 \leq u \leq t}})$$

$= \mathbb{P}(N_s = 0)$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(W_i > s) = \int_0^{\infty} \mathbb{P}(N_s = 0) \, dS_i(t) = \mathbb{P}(N_s = 0) = e^{-\lambda s}.$$

Nezávislost: pro $i<j$

$$\mathbb{P}(W_i>s, W_j>t) = \int_s^\infty \mathbb{P}(W_j>t \mid W_i=u)\,\lambda e^{-\lambda u}\,du$$

$$= \int_s^\infty \mathbb{P}(N_{T_j+t}-N_{T_j}=0 \mid T_{i+1}-T_i=u)\,\lambda e^{-\lambda u}\,du$$

$i+1\leq j \Rightarrow T_{i+1}\leq T_j$ ... nezávislé

$$= \int_s^\infty \mathbb{P}(N_{T_j+t}-N_{T_j}=0)\cdot\mathbb{P}(W_i=u)\,\lambda e^{-\lambda u}\,du = \mathbb{P}(W_j>t)\,\mathbb{P}(W_i>s).$$

$(W_i)_i$ jsou tedy po dvou nezávislé. Stejně pro $W_1,\ldots,W_n$, $n\geq 2$

... jsou i vzájemně nezávislé.

2, $T_n = \sum_{i=0}^{n-1} W_i$, W_i nezávislé s rozdělením $Exp(\lambda)$

$\hookrightarrow T_n \overset{\mathcal{D}}{\sim} \Gamma(n, \lambda)$. $\boxtimes$

Opačná konstrukce: $(W_n)_{n\geq 0}$ nezávislé $Exp(\lambda)$, $\lambda > 0$

Položme • $T_0 = 0$, $T_n = \sum_{i=0}^{n-1} W_i$

• $N_t = \#\{n \in \mathbb{N} : T_n \leq t\}$, $t \geq 0$; $N_0 = 0$

$\underset{\text{bez dk.}}{\hookrightarrow}$ $(N_t)_{t\geq 0}$ je Poissonův proces s intenzitou $\lambda > 0$.

Vlastnosti trajektorií Poissonova procesu

1, Po částech konstantní, rostoucí, spojité zprava s limitou zleva s.j.

2, $Ran(N) = \mathbb{N}_0$

3, Splňují zákon velkých čísel

Lemma: Buď $(Z_n)_{n\geq 0}$ posloupnost náhodných veličin taková, že $Z_n \xrightarrow{n\to\infty} Z$ s.j. Mějme dále n.p. $(M_t)_{t\geq 0}$, $Ran(M_t) = \mathbb{N}$, $\lim_{t\to+\infty} M_t = +\infty$ s.j. Pak $Z_{M_t(\omega)}(\omega) \xrightarrow[t\to+\infty]{} Z$ s.j.

Důkaz: $\exists\, \Omega_1, \Omega_2 \in \mathcal{F}$, $\mathbb{P}(\Omega_1) = \mathbb{P}(\Omega_2) = 1$

$Z_n(\omega) \xrightarrow[n\to\infty]{} Z(\omega)$, $\omega \in \Omega_1$

$M_t(\omega) \xrightarrow[t\to\infty]{} +\infty$, $\omega \in \Omega_2$ ... $\mathbb{P}(\Omega_1 \cap \Omega_2) = 1$

$\omega \in \Omega_1 \cap \Omega_2$: $Z_{M_t(\omega)}(\omega) \to Z$ ... limita složené funkce

Věta (Zákon velkých čísel pro Poissonův proces)

Buď $N=(N_t)_{t\ge 0}$ homogenní Poissonův proces s intenzitou $\lambda>0$. Pak platí $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{N_t}{t} = \lambda$ s.j.

(tedy pro skoro všechny trajektorie).

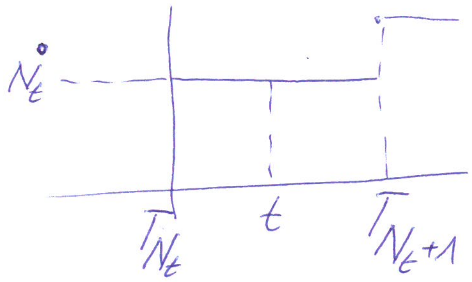
Důkaz: • Pro každé n je $T_n = \sum\limits_{i=0}^{n-1} W_i$. Tedy je $T_n < +\infty$ skoro jistě.

Pak ale i $\lim\limits_{t\to\infty} N_t \ge n$ skoro jistě. n bylo libovolné $\Rightarrow$

$\lim\limits_{t\to+\infty} N_t = +\infty$ skoro jistě.

$$\bullet\ \frac{1}{n} T_n = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} W_i \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{silný ZVČ}} \mathbb{E} W_1 = \frac{1}{\lambda} \text{ skoro jistě.}$$

• Z lemmatu: $\frac{T_{N_t}}{N_t} \to \frac{1}{\lambda}$ skoro jistě a tedy i $\frac{N_t}{T_{N_t}} \to \lambda$ skoro jistě.



... $\forall t>0: \ T_{N_t} \le t \le T_{N_t+1}$

$$\& \quad \underbrace{\frac{N_t}{N_t+1}}_{\downarrow 1}\cdot\underbrace{\frac{N_t+1}{T_{N_t+1}}}_{\downarrow \lambda} \le \frac{N_t}{t} \le \underbrace{\frac{N_t}{T_{N_t}}}_{\downarrow \lambda}$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to\infty} \frac{N_t}{t} = \lambda \text{ skoro jistě.}$$

Pozn. Nehomogenní Poissonův proces

$$N_t - N_s \overset{\mathcal{D}}{\sim} Poi(\Lambda(s,t)), \quad \Lambda(s,t) = \int_s^t \lambda(x)\,dx.$$