Chapman-Kolmogorovy rovnice

• Markovovy řetězce s diskrétním časem

... $X = (X_t)_{t \in \mathbb{N}}$ ... $X_0, X_1, X_2, X_3, \dots$ posloupnost náhodných veličin,

pro kterou platí: • obor hodnot ($\equiv$ množina stavů) je spočetná ... $\mathbb{Z}$

• splňují Markovovu vlastnost

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j_{n+1} \mid X_0 = j_0, X_1 = j_1, \dots, X_n = j_n) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j_{n+1} \mid X_n = j_n).$$

(pokud jsou obě strany def. ... & $\forall j$'s.

$$p_{ij}^{(n)} = \mathbb{P}(X_n = j \mid X_0 = i) = \mathbb{P}(X_{n+k} = j \mid X_k = i) \quad \dots \text{ pro homogenní řetězec}$$

definujeme i $\quad p_{ij}^{(0)} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$

Pak $\quad p_{ij}^{(n)} = \sum_{k \in \mathbb{Z}}' p_{ik}^{(m)} p_{kj}^{(n-m)}$ pro všechna $i, j \in \mathbb{Z}$ a $0 \le m \le n$.
(Chapman-Kolmogorova rovnost)

$$\dots\ p_{ij}^{(n)} = \mathbb{P}(X_n = j \mid X_0 = i) = \sum_{k \in \mathbb{Z}}' \mathbb{P}(X_n = j, X_m = k \mid X_0 = i)$$

$$= \sum_{k \in \mathbb{Z}}' \frac{\mathbb{P}(X_n = j, X_m = k, X_0 = i)}{\mathbb{P}(X_m = k, X_0 = i)} \cdot \frac{\mathbb{P}(X_m = k, X_0 = i)}{\mathbb{P}(X_0 = i)}$$

$$= \sum_{k \in \mathbb{Z}}' \mathbb{P}(X_n = j \mid X_m = k, X_0 = i) \cdot \mathbb{P}(X_m = k \mid X_0 = i)$$

$$= \sum_{k \in \mathbb{Z}}' \mathbb{P}(X_n = j \mid X_m = k)\, \mathbb{P}(X_m = k \mid X_0 = i) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_{kj}^{(n-m)} p_{ik}^{(m)}.$$

• Markovovy řetězce se spojitým časem

$X = (X_t)_{t \geq 0}$, stavový prostor je stále spočetný

$$\mathbb{P}(X_t = j \mid X_s = i, X_{t_n} = i_n, X_{t_{n-1}} = i_{n-1}, \dots, X_{t_0} = i_0)$$
$$= \mathbb{P}(X_t = j \mid X_s = i)$$

pro $\forall\ 0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n < s < t$

Pro homogenní řetězec: $\mathbb{P}(X_t = j \mid X_s = i) = \mathbb{P}(X_{t-s} = j \mid X_0 = i) =: p_{ij}(t-s)$ $s<t$

Chapman-Kolmogorova rovnost:

$$p_{ij}(s+t) = \sum_{k \in \mathcal{Z}} p_{ik}(s)\, p_{kj}(t) \quad \dots \text{pro všechna } i,j \in \mathcal{Z},\ s,t > 0.$$

(Důkaz - jako cvičení)

Markovské procesy se spojitým časem

$$X = (X_t)_{t \geq 0}$$

$$\forall 0 \leq t_0 < t_1 < \ldots < t_n < t : \mathbb{P}(X_t \in A \mid X_{t_0}, \ldots, X_{t_n}) = \mathbb{P}(X_t \in A \mid X_{t_n})$$

- Sdružené distribuční funkce

$$F_{t_1, \ldots, t_n}(x_1, \ldots, x_n) = \mathbb{P}(X_{t_1} \leq x_1, \ldots, X_{t_n} \leq x_n)$$

... budeme předpokládat, že všechny tyto funkce jsou abs. spojité

$\Rightarrow$ existují hustoty $f_{t_1, \ldots, t_n}$

$$F_{t_1, t_2}(x_1, x_2) \ \ldots \ \mathbb{P}(X_{t_1} \in A, X_{t_2} \in B) = \int_{A \times B} f_{t_1, t_2}(u, v) \, d(u, v)$$

$$= \int_A \int_B f_{t_1, t_2}(u, v) \, dv \, du \quad ; \ f_{t_1, t_2}(x_1, x_2) = \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1} F_{t_1, t_2}(x_1, x_2).$$

Chceme opět definovat pravděpodobnosti přechodu

"$p_{t,s}(y|x) = \mathbb{P}(X_t = y \mid X_s = x)$" ... podmíněná pravděpodobnost není jednoznačně definovaná

podmíněná hustota pravděpodobnosti:

X, Y dvě náhodné veličiny s hustotami f_X, f_Y; sdružená hustota $f_{XY}(x, y)$

$$\mathbb{P}(Y \in B \mid X = x) = \lim_{h \to 0^+} \mathbb{P}\left(Y \in B \,\middle|\, |X - x| < \frac{h}{2}\right) =$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{\mathbb{P}\left(Y \in B \ \& \ X \in \left(x - \frac{h}{2}, x + \frac{h}{2}\right)\right)}{\mathbb{P}\left(X \in \left(x - \frac{h}{2}, x + \frac{h}{2}\right)\right)} = \lim_{h \to 0^+} \frac{\frac{1}{h} \int_{x - h/2}^{x + h/2} \int_B f_{X,Y}(u, v) \, dv \, du}{\frac{1}{h} \int_{x - \frac{h}{2}}^{x + \frac{h}{2}} f_X(u) \, du} \xrightarrow{\text{pro hladké}} \frac{\int_B f_{X,Y}(x, v) \, dv}{f_X(x)}$$

$$= \int_B \frac{f_{X,Y}(x, v)}{f_X(x)} \, dv \qquad \ldots \mathbb{P}(Y = y \mid X = x) := \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_X(x)}.$$

Definujeme tedy $p_{s,t}(x,y)$ jako hustotu $f_{X_s,X_t}(x,y)$, $p_s(x) = f_{X_s}(x)$ atd.

a $p_{t;s}(y|x) = \mathbb{P}(X_t = y \mid X_s = x) = \dfrac{p_{s,t}(x,y)}{p_s(x)}$

Z Markovské vlastnosti: $\mathbb{P}(X_u \mid X_t, X_s) = \mathbb{P}(X_u \mid X_t)$

$s < t < u$

Tedy $$\frac{p_{s,t,u}(x,y,z)}{p_{s,t}(x,y)} = \frac{p_{t,u}(y,z)}{p_t(y)}$$

$$\Rightarrow p_{s,t,u}(x,y,z) = p_s(x) \cdot \frac{p_{s,t}(x,y)}{p_s(x)} \cdot \frac{p_{t,u}(y,z)}{p_t(y)} = p_s(x) \cdot p_{t;s}(y|x) \cdot p_{u;t}(z|y)$$

Z konzistence distribučních funkcí:

$$\frac{1}{p_s(x)} \int_{\mathbb{R}} p_{s,t,u}(x,y,z)\,dy = \frac{p_{s,u}(x,z)}{p_s(x)} = p_{u;s}(z|x) = \int_{\mathbb{R}} p_{t;s}(y|x)\,p_{u;t}(z|y)\,dy$$

Chapman-Kolmogorova rovnice je tedy

$$p_{u;s}(z|x) = \int_{\mathbb{R}} p_{t;s}(y|x)\,p_{u;t}(z|y)\,dy \quad \ldots \forall s < t < u, \ \forall x,z \in \mathbb{R}$$

Příklady 1, Pro Brownův pohyb platí $(s<t)$

$$P_{t;s}(y|x) = \mathbb{P}(W_t = y \mid W_s = x)$$

... hustota $W_{t-s} \sim N(0, t-s)$ v bodě $y-x$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\left(-\frac{|y-x|^2}{2(t-s)}\right)$$

2, Ornstein-Uhlenbeck proces: $V_t = e^{-t} W(e^{2t})$

splňuje $P_{t;s}(y|x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-e^{-2(t-s)})}} \exp\left(-\frac{|y-xe^{-(t-s)}|^2}{2(1-e^{-2(t-s)})}\right)$

$$\mathbb{P}(V_t \leq y \mid V_s = x) = \mathbb{P}(e^{-t} W(e^{2t}) \leq y \mid e^{-s} W(e^{2s}) = x)$$

$$= \mathbb{P}(W(e^{2t}) \leq ye^t \mid W(e^{2s}) = xe^s)$$

$$= \int_{-\infty}^{ye^t} \frac{1}{\sqrt{2\pi(e^{2t}-e^{2s})}} \exp\left(-\frac{|z-xe^s|^2}{2(e^{2t}-e^{2s})}\right) dz = \begin{vmatrix} z = \rho e^t \\ dz = e^t d\rho \end{vmatrix}$$

$$= \int_{-\infty}^{y} \frac{1 \cdot e^t}{\sqrt{2\pi(e^{2t}-e^{2s})}} \cdot \exp\left(-\frac{|\rho e^t - xe^s|^2}{2(e^{2t}-e^{2s})}\right) d\rho$$

$$= \int_{-\infty}^{y} \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-e^{-2(t-s)})}} \cdot \exp\left(-\frac{\cancel{e^{2t}}|\rho - xe^{s-t}|^2}{\cancel{e^{2t}} \cdot 2(1-e^{-2(t-s)})}\right) d\rho .$$

Nebo NE!! $P_{t;s}(y|x) = \mathbb{P}(V_t = y \mid V_s = x) = \mathbb{P}(e^{-t} W(e^{2t}) = y \mid e^{-s} W(e^{2s}) = x)$

$$= \mathbb{P}(W(e^{2t}) = ye^t \mid W(e^{2s}) = xe^s)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi(e^{2t}-e^{2s})}} \exp\left(-\frac{|ye^t - xe^s|^2}{2(e^{2t}-e^{2s})}\right) = \frac{1}{e^t\sqrt{2\pi(1-e^{-2(t-s)})}} \exp\left(-\frac{e^{2t}|y-xe^{s-t}|^2}{e^{2t} \cdot 2(1-e^{-2(t-s)})}\right)$$

Kolmogorovy diferenciální rovnice

- Markovovy řetězce se spojitým časem (homogenní)

  - Stejně jako v případě diskrétního času:

$$p_j(t) := \mathbb{P}(X_t = j)$$

Pak $p_k(t) = \mathbb{P}(X_t = k) = \sum_{j\in\mathbb{Z}}' \mathbb{P}(X_t = k, X_0 = j) = \sum_{j\in\mathbb{Z}}' \mathbb{P}(X_t = k \mid X_0 = j)\,\mathbb{P}(X_0 = j)$

$$= \sum_{j\in\mathbb{Z}}' p_{jk}(t)\cdot p_j(0)$$

Pokud definujeme $P(t) = (p_{ij}(t))_{i,j\in\mathbb{Z}}$, pak je

$$[p(t)]^T = [p(0)]^T P(t)$$

Chapman-Kolmogorovu rovnici lze tedy zapsat maticově

$$P(s+t) = P(s)P(t) \quad , s,t > 0$$

Dále definujeme $P(0) = I$. ... $\{P(t)\}_{t\geq 0}$ je "operátorová semigrupa"!

Nechť pro každé $\pi \in l_1(\mathbb{Z})$ existuje ... $P(h) = P_h$; $P(t) = P_t$

$$G\pi = l_1\text{-}\lim_{h\to 0^+}\left(\frac{P_h - I}{h}\right)(\pi) = \lim_{h\to 0^+}\frac{P_h(\pi) - \pi}{h}$$

Pak pro každé $t_0 > 0$ a $\pi \in l_1(\mathbb{Z})$

$$\lim_{t\to t_0^+}\frac{(P_t - P_{t_0})(\pi)}{t - t_0} = \lim_{h\to 0^+}\frac{(P_{t_0+h} - P_{t_0})(\pi)}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{P_h P_{t_0}(\pi) - P_{t_0}(\pi)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+}\left(\frac{P_h - I}{h}\right)(P_{t_0}\pi) \underset{\text{v } l_1(\mathbb{Z})}{=} G\,P_{t_0}(\pi)$$

... V tomto smyslu tedy platí

$$P_{t_0}' = G\,P_{t_0}$$

- Protože $P(s)$ a $P(t)$ komutují pro všechna $s,t>0$

$$P(s)P(t) = P(s+t) = P(t)P(s),$$

komutují i G a $P(t)$

$$P(t)G\pi = P(t)\left[\lim_{h\to 0^+} \frac{P(h)-I}{h}\pi\right] = \lim_{h\to 0^+}\left(\frac{P(h)-I}{h}\right)(P(t)\pi)$$

$$= GP(t)\pi \quad \dots \quad \text{tedy } P_{t_0}' = GP_{t_0} = P_{t_0}G.$$

Příklad: Yuleův proces

- Z každého jedince může v intervalu $(t, t+h]$ vzniknout nový jedinec s pravděpodobností $\lambda h + o(h)$, nezávisle na ostatních
- jedinci nehynou; X_t je počet jedinců v čase $t\geq 0$; $X_0 = 1$ s.j.

Celkem je tedy
$$P_{j,j+1}(h) = j\cdot(\lambda h + o(h))(1-\lambda h + o(h))^{j-1}$$
$$= j\lambda h + o(h)$$
$$P_{j,j+k}(h) = o(h),\ k\geq 2$$
$$P_{j,j}(h) = (1-\lambda h + o(h))^j = 1 - j\lambda h + o(h)$$

$$\hookrightarrow g_{jj} = \lim_{h\to 0^+}\frac{P_{jj}(h)-1}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{1-j\lambda h - 1 + o(h)}{h} = -j\lambda$$

$$g_{j,j+1} = \lim_{h\to 0^+}\frac{P_{j,j+1}(h)-0}{h} = j\lambda\ ;\ g_{j,j+k} = 0,\ k\geq 2$$

$$G = \begin{pmatrix} -\lambda, & \lambda, & 0, & \dots & & \\ 0, & -2\lambda, & 2\lambda, & 0, & \dots & \\ 0, & 0, & -3\lambda, & 3\lambda, & 0 & \dots \\ & & & \ddots & & \end{pmatrix}$$

Rovnice $P' = GP = PG$ lze řešit dvěma způsoby

- algebraicky $P(t) = e^{tG}$, $P(0) = I$
- metodou "vytvořující funkce"

$$P_*'(t)^T = p(0)^T \cdot P'(t) = p(0)^T P(t) G = p(t)^T G$$

vede na $\quad (p_1'(t), p_2'(t), p_3'(t), \ldots) = (p_1(t), p_2(t), p_3(t), \ldots) \begin{pmatrix} -\lambda, & \lambda, & 0, & 0, & \ldots \\ 0, & -2\lambda, & 2\lambda, & 0, & \ldots \\ 0, & 0, & -3\lambda, & 3\lambda, & \ldots \\ & & \ddots & 0 & \end{pmatrix}$

$$\hookrightarrow p_1'(t) = -\lambda p_1(t)\,;\quad p_2'(t) = \lambda p_1(t) - 2\lambda p_2(t), \ldots$$

$$p_j'(t) = \lambda(j-1) p_{j-1}(t) - \lambda j p_j(t), \quad j > 1$$

j-tou rovnici vynásobíme s^j a sečteme

$$\sum_{j=1}^{\infty} p_j'(t) s^j = -\lambda \sum_{j=1}^{\infty} j p_j(t) s^j + \lambda \sum_{j=2}^{\infty} (j-1) p_{j-1}(t) s^j$$

$$= -\lambda s \sum_{j=1}^{\infty} j p_j(t) s^{j-1} + \lambda s^2 \sum_{j=1}^{\infty} j p_j(t) s^{j-1}$$

Pokud $\phi(s,t) = \sum_{j=1}^{\infty} p_j(t) s^j$, pak

$$\frac{\partial \phi(s,t)}{\partial t} = -\lambda s \frac{\partial \phi(s,t)}{\partial s} + \lambda s^2 \frac{\partial \phi(s,t)}{\partial s} = \lambda s \frac{\partial \phi(s,t)}{\partial s} \cdot (s-1)$$

$$\phi(s,0) = s$$

Hledáme řešení ve tvaru $\phi(s,t) = F(\varphi(s)\psi(t))$

$$F'(\varphi(s)\psi(t)) \cdot \varphi(s)\psi'(t) = \lambda s(s-1) F'(\varphi(s)\psi(t)) \cdot \varphi'(s)\psi(t)$$

$$\frac{\psi'(t)}{\psi(t)} = \lambda s(s-1) \frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)} = \alpha$$

$$\psi(t) = K_1 e^{\alpha t}; \quad \ln(\varphi(s)) + c = \int \frac{\alpha/\lambda}{s(s-1)} ds = \frac{\alpha}{\lambda} \int \left\{ \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} \right\} ds = \frac{\alpha}{\lambda} \ln\left(\frac{s-1}{s}\right)$$

$$\varphi(s) = \left(\frac{s-1}{s}\right)^{\alpha/\lambda} \cdot K_2 \quad \ldots \quad \phi(s,t) = F\left(\left(\frac{s-1}{s}\right)^{\alpha/\lambda} e^{\alpha t}\right) \quad \ldots \quad K_1 \cdot K_2 \text{ do } F$$

$$\Phi(s,0) = F\left(\left(\frac{s-1}{s}\right)^{\alpha/\lambda}\right) = s \,;$$

$$x = \left(\frac{s-1}{s}\right)^{\alpha/\lambda} \ldots \quad x^{\lambda/\alpha} = \frac{s-1}{s} = 1 - \frac{1}{s} \quad \ldots \quad \frac{1}{s} = 1 - x^{\lambda/\alpha}$$

$$s = \frac{1}{1 - x^{\lambda/\alpha}}$$

$$F(x) = \frac{1}{1 - x^{\lambda/\alpha}}$$

$$\phi(s,t) = \frac{1}{1 - \left[\left(\frac{s-1}{s}\right)^{\alpha/\lambda} e^{\alpha t}\right]^{\lambda/\alpha}} = \frac{1}{1 - \frac{s-1}{s} \cdot e^{\lambda t}} = \frac{s}{s - (s-1)e^{\lambda t}}$$

$$= \frac{s e^{-\lambda t}}{1 - s + s e^{-\lambda t}} = s e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty}{}' \left[s(1 - e^{-\lambda t}) \right]^k = \sum_{k=1}^{\infty}{}' s^k e^{-\lambda t} (1 - e^{-\lambda t})^{k-1}$$

$$\Rightarrow P(X_t = k) = p_k(t) = e^{-\lambda t}(1 - e^{-\lambda t})^{k-1}.$$

Z $\sum_{k=1}^{\infty}{}' k\alpha^{k-1} = \frac{1}{(1-\alpha)^2}$ plynie $\mathbb{E} X_t = \sum_{k=1}^{\infty}{}' k \, \mathbb{P}(X_t = k)$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}{}' k e^{-\lambda t} (1 - e^{-\lambda t})^{k-1} = \frac{e^{-\lambda t}}{e^{-2t\lambda}} = e^{t\lambda}.$$

Difúzní procesy a Kolmogorovy rovnice

– speciální třída markovských procesů

- Připomeňme, že $p_{t;s}(y|x) = \mathbb{P}(X_t = y | X_s = x)$
- Pro pevné $t > s$ a x je tímto dána míra na $\mathbb{R}$

$$\Gamma \to P_{t;s}(\Gamma|x) = \int_\Gamma p_{t;s}(y|x)\,dy = \mathbb{P}(X_t \in \Gamma | X_s = x)$$

Integrál vzhledem k této míře → $P_{t;s}(dy|x)$ … lze nahradit $p_{t;s}(y|x)dy$

Například Chapman-Kolmogorov lze přeformulovat

$s < t < u$: $$p_{u;s}(z|x) = \int_{\mathbb{R}} p_{t;s}(y|x)\,p_{u;t}(z|y)\,dy$$

pak $$P_{u;s}(\Gamma|x) = \int_\Gamma p_{u;s}(z|x)\,dz = \int_\Gamma \int_{\mathbb{R}} p_{t;s}(y|x)\,p_{u;t}(z|y)\,dy\,dz$$

$$= \int_{\mathbb{R}} p_{t;s}(y|x) \int_\Gamma p_{u;t}(z|y)\,dz\,dy = \int_{\mathbb{R}} p_{t;s}(y|x)\,P_{u;t}(\Gamma|y)\,dy =$$

$$=: \int_{\mathbb{R}} P_{u;t}(\Gamma|y)\,P_{t;s}(dy|x).$$

Definice (Difúzní procesy)

Buď $X = (X_t)_{t \geq 0}$ markovský proces s přechodovou funkcí $P_{t;s}(\Gamma|x)$.

Pak se nazývá difúzní proces, pokud

1, (Spojitost) $\forall x\ \forall \varepsilon > 0$: $$\int_{y:|x-y|>\varepsilon} P_{t;s}(dy|x) = o(t-s)$$

$$\left(\Leftrightarrow \lim_{t \to s^+} \frac{1}{t-s} \int_{y:|x-y|>\varepsilon} P_{t;s}(dy|x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{t \to s^+} \frac{1}{t-s} \int_{y:|x-y|>\varepsilon} p_{t;s}(y|x)\,dy = 0 \right)$$

stejnoměrně pro $s < t$

2, (Koeficient driftu) ... existuje funkce $b_s(x) = b(x,s)$ tak, že pro všechna x a $\forall \varepsilon > 0$:

$$\int_{y:|y-x|\leq\varepsilon} (y-x) P_{t,s}(dy|x) = b(x,s)(t-s) + o(t-s)$$

stejnoměrně pro $s < t$.

3, (Difúzní koeficient) ... existuje funkce $\Sigma_s(x) = \Sigma(x,s)$ tak, že pro všechna x a $\forall \varepsilon > 0$:

$$\int_{y:|y-x|\leq\varepsilon} (y-x)^2 P_{t,s}(dy|x) = \Sigma(x,s)(t-s) + o(t-s)$$

stejnoměrně přes $s < t$.

Poznámka: 1, Spojitost : $B_x(\varepsilon) = \{y : |y-x| \leq \varepsilon\}$

$$\Updownarrow \quad \lim_{t\to s^+} \frac{1}{t-s} \mathbb{P}(X_t \in B_x(\varepsilon)^c | X_s = x) = 0$$

... pravděpodobnost, že proces opustí $B_x(\varepsilon)$ roste sublineárně

2, Integrace v 2, a 3, je omezena přes $B_x(\varepsilon)$ ... nepředpokládali jsme konvergenci momentů ... levé strany by mohly být $\equiv \infty$.

3, Pro konvergenci i přes $\mathbb{R}$:

$$b(x,s) = \lim_{t\to s^+} \frac{1}{t-s} \int_{\mathbb{R}} (y-x) P_{t,s}(dy,x) = \lim_{t\to s^+} \frac{1}{t-s} \int_{\mathbb{R}} (y-x) p_{t,s}(y,x)\,dy$$

$$= \lim_{t\to s^+} \frac{1}{t-s} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{P}(X_t = y | X_s = x)(y-x)\,dy$$

$$= \lim_{t\to s^+} \frac{1}{t-s} \mathbb{E}(X_t - X_s | X_s = x) = \mathbb{E}\left(\frac{X_t - X_s}{t-s} \middle| X_s = x\right).$$

Stejně $\Sigma(x,s) = \lim_{t\to s^+} \mathbb{E}\left(\frac{|X_t - X_s|^2}{t-s} \middle| X_s = x\right).$

Věta (Zpětná Kolmogorova rovnice)

Nechť $f \in C_{pb}(\mathbb{R})$ (= spojitá & omezená funkce) a nechť

$$u(x,s) := \mathbb{E}\left(f(X_t) \mid X_s = x\right) = \int_{\mathbb{R}} f(y)\, P_{t;s}(dy|x)$$

$$\left(= \int_{\mathbb{R}} f(y)\, p_{t;s}(y|x)\, dy\right),$$ kde $t>0$ je pevné.

Nechť $b(x,s)$ a $\Sigma(x,s)$ jsou hladké v x a s. Pak $u(x,s)$ řeší (pro $x \in \mathbb{R}$ a $0<s<t$)

$$-\frac{\partial u}{\partial s} = b(x,s)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\Sigma(x,s)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,;\ u(x,t) = f(x)$$

Důkaz: • Nejprve ověříme $u(x,t) = f(x)$

$$u(x,s) = \int_{\mathbb{R}} f(y)\, P_{t;s}(dy|x) = f(x) + \int_{\mathbb{R}} [f(y) - f(x)]\, P_{t;s}(dy|x)$$

a tedy

$$|u(x,s) - f(x)| \le \int_{y:|x-y|\le\varepsilon} |f(x)-f(y)|\, P_{t;s}(dy|x) + \underbrace{\int_{y:|x-y|>\varepsilon} |f(x)-f(y)|\, P_{t;s}(dy|x)}_{\le 2\|f\|_\infty \int_{y:|x-y|>\varepsilon} P_{t;s}(dy|x) = o(t-s)}$$

$$\le \int_{y:|x-y|\le\varepsilon} |f(x)-f(y)|\, P_{t;s}(dy|x) + o(t-s)$$

Pro $s \to t^-$, poté $\varepsilon \to 0$ $\implies u(x,t) = \lim_{s\to t^-} u(x,s) = f(x)$.

Ověříme splnění dif. rovnice

- Pro $|f(z)| \le K$ je i $|u(x,s)| = |\mathbb{E}(f(X_t) | X_s = x)| \le K$.

- Užijeme Chapman-Kolmogorov

$$\underset{t>\rho>\sigma}{u(x,\sigma)} = \int_{\mathbb{R}} f(z) P_{t,\sigma}(dz|x) = \int_{\mathbb{R}} f(z) \int_{\mathbb{R}} P_{t,\rho}(dz|y) P_{\rho,\sigma}(dy|x)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(z) P_{t,\rho}(dz|y) \right) P_{\rho,\sigma}(dy|x)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} u(y,\rho) P_{\rho,\sigma}(dy|x) = \int_{y\in\mathbb{R}:|x-y|\le\varepsilon} u(y,\rho) P_{\rho,\sigma}(dy|x) + \int_{y:|x-y|>\varepsilon} u(y,\rho) P_{\rho,\sigma}(dy|x)$$

$$= \int_{y:|x-y|\le\varepsilon} u(y,\rho) P_{\rho,\sigma}(dy|x) + o(\rho-\sigma)$$

$$\dots = o(t-\sigma)$$

- $$-\frac{\partial u(x,s)}{\partial s} = \lim_{h\to 0^+} \frac{u(x,s)-u(x,s+h)}{h}$$

- $$\underset{\sigma=s,\ \rho=s+h}{u(x,s)-u(x,s+h)} = \left(\int_{y:|x-y|\le\varepsilon} u(y,s+h) P_{s+h,s}(dy|x) \right) - \underbrace{u(x,s+h)} + o(h)$$

$$u(x,s+h) = \int_{\mathbb{R}} u(x,s+h) P_{s+h,s}(dy|x) = \int_{y:|x-y|\le\varepsilon} u(x,s+h) P_{s+h,s}(dy|x) + o(h)$$

$$= \int_{y:|x-y|\le\varepsilon} [u(y,s+h) - u(x,s+h)] P_{s+h,s}(dy|x) + o(h)$$

- $$u(y,\rho) - u(x,\rho) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,\rho)(y-x) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,\rho)(y-x)^2$$

$$+ \frac{1}{2}\underbrace{\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\nu,\rho) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,\rho)\right]}_{\nu \text{ mezi } x,y\ ;\ \alpha^\rho_{x,y} \to 0 \text{ pro } y\to x.}(y-x)^2$$

tedy pro $|x-y| \le \varepsilon$ $\&$ $\varepsilon \to 0$

• Celkem tedy

$$u(x,s)-u(x,s+h)=\int_{y:|x-y|\le\varepsilon}\Big\{\frac{\partial u}{\partial x}(x,s+h)\cdot(y-x)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,s+h)(y-x)^2$$

$$+\frac{1}{2}\alpha_{x,y}^{s+h}(x-y)^2\Big\}P_{s+h,s}(dy|x)+o(h)$$

$$=\frac{\partial u}{\partial x}(x,s+h)\int_{y:|x-y|\le\varepsilon}(y-x)P_{s+h,s}(dy|x)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,s+h)\int_{y:|x-y|\le\varepsilon}(y-x)^2P_{s+h,s}(dy|x)$$

$$+\frac{1}{2}\int_{y:|x-y|\le\varepsilon}(x-y)^2\alpha_{xy}^{s+h}P_{s+h,s}(dy|x)+o(h)$$

$\sup|\alpha_{xy}|O(h)$

$$=h\cdot b(x,s)\frac{\partial u}{\partial x}(x,s+h)+\frac{1}{2}\Sigma(x,s)\cdot h\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,s+h)+\sup|\alpha_{xy}|O(h)+o(h)$$

$\uparrow$ vydělit h, $h\to 0$, pak $\varepsilon\to 0$

$$\Rightarrow -\frac{\partial u}{\partial s}(x,s)=b(x,s)\frac{\partial u}{\partial x}(x,s)+\frac{1}{2}\Sigma(x,s)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,s)$$

$\blacksquare$

"Dopředná" (= Forward) Kolmogorova rovnice (= Fokker-Planckova rovnice)

- Budeme předpokládat, že $P_{t;s}(dy|x)$ má hustotu $= p_{t;s}(y|x)dy$
- rovnice pro "budoucí" parametry y, t

Věta: Nechť $X=(X_t)_{t\geq 0}$ je difúzní proces a nechť $p_{t;\cdot}(y|\cdot)$; $b(y,t)$, $\Sigma(y,t)$ jsou hladké funkce. Pak

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial y}\big(b(y,t)p\big) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\big(\Sigma(y,t)p\big); \quad p_{s;s}(y|x) = \delta(x-y).$$

Důkaz: • Počáteční podmínka plyne z definice p: $p_{s;s}(y|x) = \mathbb{P}(X_s = y | X_s = x) = \begin{cases} 1 \dots x=y \\ 0 \dots y\neq x. \end{cases}$

- Pro hladkou $f \in C_0^2(\mathbb{R})$ (dvakrát spojitě diferencovatelná, $\lim = 0$ v nekonečnu) dostaneme (podobně jako v důkazu zpětné Kolmogorovy rovnice)

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\int f(y)\, p_{s+h;s}(y|x)\,ds - f(x)\right) = b(x,s)\frac{df}{dx}(x) + \frac{1}{2}\Sigma(x,s)\frac{d^2 f}{dx^2}(x)$$

Na druhou stranu

$$\int f(y)\frac{\partial}{\partial t}p_{t;s}(y|x)\,dy = \frac{\partial}{\partial t}\int f(y)\,p_{t;s}(y|x)\,dy$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int f(y)\big[p_{t+h;s}(y|x) - p_{t;s}(y|x)\big]dy$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{\int p_{t+h;s}(y|x)f(y)\,dy - \int p_{t;s}(z|x)f(z)\,dz\right\}$$

Chapman-Kolmogorov $= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{\iint p_{t+h;t}(y|z)\,p_{t;s}(z|x)\,f(y)\,dy\,dz - \int p_{t;s}(z|x)f(z)\,dz\right\}$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int p_{t;s}(z|x)\left[\int p_{t+h;t}(y|z)f(y)\,dy - f(z)\right]dz$$

$$= \int p_{t;s}(z|x)\left(b(z,t)\frac{df}{dz}(z) + \frac{1}{2}\Sigma(z,t)\frac{d^2f}{dz^2}(z)\right)dz$$

per partes & vynechání okr. členů

$$= \int -f(z)\frac{\partial}{\partial z}\left(b(z,t)p_{t;s}(z|x)\right) + \frac{1}{2}f(z)\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\Sigma(z,t)p_{t;s}(z|x)\right)dz$$

Rovnice tedy platí pro každou testovací funkci => platí obecně $\blacksquare$

Příklad: Wienerův proces je difúzní proces, $X=(W_t)_{t\geq 0}$

- $$\int_{y:|x-y|>\varepsilon} P_{t;s}(dy|x) = \int_{y:|x-y|>\varepsilon} p_{t;s}(y|x)dy = \mathbb{P}(|X_t - x|>\varepsilon|X_s=x)$$

$$= \mathbb{P}(|X_t - X_s|>\varepsilon|X_s=x) = \mathbb{P}(|X_t-X_s|>\varepsilon) = \mathbb{P}(|X_{t-s}|>\varepsilon)$$

$$\leq \frac{\mathbb{E}|X_{t-s}|^4}{\varepsilon^4} \simeq \frac{(t-s)^2}{\varepsilon^4} \;\dots\; = o(t-s).$$

- $\mathbb{E}\left(\frac{X_t-X_s}{t-s}\middle|X_s=x\right)=0 \;\dots\; b(x,s)=0$
- $\mathbb{E}\left(\frac{|X_t-X_s|^2}{t-s}\middle|X_s=x\right) = \mathbb{E}\left(\frac{|X_{t-s}|^2}{t-s}\right) = 1 = \Sigma(x,s).$

Zpětná rovnice: $-\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

Dopředná rovnice: $\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}$. ... rovnice vedení tepla (zpozorováno Einsteinem)