

Náhodná procházka v jedné a více dimenzích (Polya 1921, $d=1, 2; d>2$) -B1-

Definice: Necht $d \geq 1$ a necht X_1, X_2, X_3, \dots je posloupnost \mathbb{R}^d -hodnotových nezávislých stejně rozdělených náhodných proměnných. Pak náhodná procházka v dimenzi d je posloupnost $(S_m)_{m \geq 0}$, kde $S_0 = 0$ a

$$S_m = S_{m-1} + X_m = X_1 + X_2 + \dots + X_m, \quad m \geq 1.$$

X_1, X_2, \dots se nazývají kroky náhodné procházky.

• Jednoduchá náhodná procházka: $d=1$. $\mathbb{P}(X_j = 1) = \mathbb{P}(X_j = -1) = \frac{1}{2}$.

$$d > 1: \mathbb{P}(X_j = +e_k) = \mathbb{P}(X_j = -e_k) = \frac{1}{2d}, \quad k=1, \dots, d$$

• N - počet výskytů v počátku, náhodná veličina

$$N = \#\{m \in \mathbb{N}_0 : S_m = 0\}$$

• τ - čas prvního návratu do 0: $\tau = \inf\{m \geq 1 : S_m = 0\} \dots \inf \emptyset = +\infty$

• $N=1 \Leftrightarrow \tau = +\infty$... náhodná procházka se nikdy nevrátila do 0.

• Náhodná procházka je

• rekurentní: $\mathbb{P}(N = +\infty) = 1 \dots \Leftrightarrow \mathbb{P}(N < +\infty) = 0$

• tranzitní: $\mathbb{P}(N < +\infty) = 1 \dots \Leftrightarrow \mathbb{P}(N = +\infty) = 0$

Lemma 1: Pro $m \geq 1$: $\mathbb{P}(N=m) = \mathbb{P}(\tau = \infty) \mathbb{P}(\tau < \infty)^{m-1}$.

Důkaz: Dokažeme nejprve $\mathbb{P}(N=m+1) = \mathbb{P}(N=m) \mathbb{P}(\tau < +\infty)$

... navrátíme do počátku se náhodnou procházkou rozpadá na dvě nez. části, první končí na $S_0 = S_k = 0$ a druhou $(S_{k+j})_{j \in \mathbb{N}_0}$, která má stejný tvar jako $(S_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$.

$$\mathbb{P}(N=m+1) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(N=m+1 \ \& \ \tau=k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(N'=m \ \& \ \tau=k)$$

$$N' = \#\{l \in \mathbb{N}_0 : S_{k+l} = 0\}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(N'=m) \cdot \mathbb{P}(\tau=k) = \mathbb{P}(N'=m) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(\tau=k) = \mathbb{P}(N=m) \mathbb{P}(\tau < +\infty)$$

Přivedení formou indukci: $m=1$: $\mathbb{P}(N=1) = \mathbb{P}(\tau = +\infty)$ OK

$$m > 1: \mathbb{P}(N=m+1) = \mathbb{P}(N=m) \mathbb{P}(\tau < +\infty) = \mathbb{P}(\tau = \infty) \cdot \mathbb{P}(\tau < +\infty)^m$$

Důležité: Každá náhodná procházka je buď rekurentní nebo tranzitivní.

Důkaz: Pokud $\mathbb{P}(\tau = +\infty) = 0$, pak $\mathbb{P}(N=m) = 0$ pro $m \geq 1$ a tedy: $\mathbb{P}(N < +\infty) = 1$... rekurentní

• Pokud $\mathbb{P}(\tau = +\infty) > 0$, pak

$$\mathbb{P}(N < +\infty) = \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}(N=m) = \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}(\tau = +\infty) \mathbb{P}(\tau < +\infty)^{m-1}$$

$$= \mathbb{P}(\tau = +\infty) \frac{1}{1 - \mathbb{P}(\tau < +\infty)} = 1.$$

Lemua 2: Na'hodua' procha'zka je konveritui, pokud $E N < +\infty$
a rekurentui pokud $E N = +\infty$.

Dikaz: $E N = \sum_{m=1}^{\infty} m P(N=m) + \infty \cdot \underbrace{P(N=+\infty)}_{\text{uvulera: } \infty \cdot 0 = 0}$.

- pokud $E N < +\infty$, je $i P(N=+\infty) = 0$... konveritui
- pokud $P(N=+\infty) = 0$... tedy $P(N < +\infty) = 1 \xrightarrow{\text{Lemua 1}} P(\tilde{\tau} = +\infty) > 0$
 $P(\tilde{\tau} < \infty) < 1$

a $E N = \sum_{m=1}^{\infty} m P(N=m) = \sum_{m=1}^{\infty} m \cdot P(\tilde{\tau} = +\infty) P(\tilde{\tau} < +\infty)^{m-1}$
 $= P(\tilde{\tau} = +\infty) \sum_{m=1}^{\infty} m P(\tilde{\tau} < +\infty)^{m-1} = \frac{P(\tilde{\tau} = \infty)}{[1 - P(\tilde{\tau} < \infty)]^2} = \frac{1}{P(\tilde{\tau} = \infty)} < +\infty$
 $\dots \sum_{m=1}^{\infty} m \alpha^{m-1} = \frac{1}{(1-\alpha)^2}, \alpha < 1$

Lemua 3: Necht' na'hodua' procha'zka v \mathbb{Z}^d ma' kroky X_1, X_2, \dots

a necht' $\varphi(k) = E(e^{ik \cdot X_1}) = E \cos(k \cdot X_1) + i E \sin(k \cdot X_1), k \in \mathbb{R}^d$.

Pak $E N = \lim_{t \rightarrow 1^-} \int_{[-\tilde{x}, \tilde{x}]^d} \frac{1}{1 - t\varphi(\xi)} \frac{d\xi}{(2\pi)^d}$

Dikaz: Pro $d=1$ je $\frac{1}{2\pi} \int_{-\tilde{x}}^{\tilde{x}} e^{im\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\tilde{x}}^{\tilde{x}} (\cos(m\theta) + i \sin(m\theta)) d\theta = \begin{cases} 1, \dots, m=0; \\ 0, \dots, m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \end{cases}$

Obecni $\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\tilde{x}, \tilde{x}]^d} e^{im \cdot \xi} d\xi = \prod_{j=1}^d \frac{1}{2\pi} \int_{-\tilde{x}}^{\tilde{x}} e^{im_j \cdot \xi_j} d\xi_j = \begin{cases} 1, m = (0, \dots, 0) \\ 0, m \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}. \end{cases}$

Dokladme-li za $m \in \mathbb{Z}^d$ na'hodua' procha'zku pom m kroci'ch: S_m obdrzime

$\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\tilde{x}, \tilde{x}]^d} e^{i S_m \cdot \xi} d\xi = \begin{cases} 1, S_m = 0 \\ 0, \text{jinak } \dots S_m \in \mathbb{Z}^d! \end{cases}$

Integrujeme přes ω :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_m=0) &= \mathbb{E} \chi_{\{S_m=0\}} = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \mathbb{E}(e^{iS_m \cdot \xi}) d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \underbrace{\mathbb{E}(e^{iX_1 \cdot \xi} \cdot e^{iX_2 \cdot \xi} \cdots e^{iX_m \cdot \xi})}_{= \mathbb{E}(e^{iX_1 \cdot \xi}) \cdots \mathbb{E}(e^{iX_m \cdot \xi}) = \varphi(\xi)^m} d\xi = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \varphi(\xi)^m d\xi. \end{aligned}$$

Pronášíme $\forall t \in [0, 1)$ t^m a sečteme ("vytvoríme funkci")

$$\sum_{m=0}^{\infty} t^m \mathbb{P}(S_m=0) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \varphi(\xi)^m d\xi = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \sum_{m=0}^{\infty} [t\varphi(\xi)]^m d\xi$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \frac{1}{1-t\varphi(\xi)} d\xi \quad \dots \text{geometrická řada konvergence, } |t\varphi(\xi)| \leq t < 1.$$

$$\text{Pro } t \rightarrow 1^-: \text{LHS} \rightarrow \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_m=0) = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{E} \chi_{\{S_m=0\}} = \mathbb{E} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \chi_{\{S_m=0\}} \right) = \mathbb{E} N.$$

Věta: Jednoduchá náhodná procházka na \mathbb{Z}^d je rekurentní pro $d=1, 2$ a tranzitivní pro $d \geq 3$.

"A drunken man will always find his way home but a drunken bird may get lost forever."

Důkaz: Pro jednoduchou náhodnou procházku je $X_j \in \{\pm e_1, \dots, \pm e_d\}$ a tedy

$$\varphi(\xi) = \mathbb{E} e^{iX \cdot \xi} = \frac{1}{2d} (e^{i\xi_1} + e^{-i\xi_1} + \dots + e^{i\xi_d} + e^{-i\xi_d}) = \frac{\cos(\xi_1) + \dots + \cos(\xi_d)}{d}.$$

Je tedy $\varphi(\xi) = 1$ na $[-\pi, \pi]^d$ jen pro $\xi = (0, \dots, 0)$ a toto je tedy jediný kritický

$$\text{bod } \int_{[-\pi, \pi]^d} \frac{1}{1-t\varphi(\xi)} d\xi, \text{ když } t \rightarrow 1^-.$$

Charakteri $1 - t\varphi(s)$ pro $s=0$ a $t \rightarrow 1^-$?

-35-

$$\bullet 1 - \cos x = 2 \sin^2(x/2); \quad \frac{2x}{\pi} \leq \sin x \leq x \quad \text{pro } x \in [0, \pi]$$

$$\Rightarrow \bullet 2 \frac{s_i^2}{\pi^2} \leq 1 - \cos(s_i) \leq \frac{s_i^2}{2}$$

$$\Rightarrow \bullet 1 - t\varphi(s) = 1 - t \cdot \frac{\cos(s_n) + \dots + \cos(s_1)}{d} = 1 - t + t \frac{(1 - \cos(s_n)) + \dots + (1 - \cos(s_1))}{d}$$

$$\geq 1 - t + \frac{t}{d} \cdot 2 \frac{|s|^2}{\pi^2}$$

$$\leq 1 - t + \frac{t}{2d} |s|^2$$

$$\text{Pro } d=1,2 \text{ je } \frac{1}{1 - t\varphi(s)} \geq \frac{1}{1 - t + \frac{2t}{2d} |s|^2} \rightarrow \frac{1}{|s|^2/2d} \quad \text{a } \int_{[-\pi, \pi]^d} \frac{1}{|s|^2} ds = +\infty \quad \dots \text{ EN} = +\infty$$

$$\text{Pro } d \geq 3 \text{ je } \frac{1}{1 - t\varphi(s)} \leq \frac{1}{1 - t + \frac{t}{d} \cdot \frac{2}{\pi^2} |s|^2} \rightarrow \frac{1}{\frac{2}{\pi^2 d} |s|^2} \quad \text{a } \int_{[-\pi, \pi]^d} \frac{1}{|s|^2} ds < +\infty \quad \dots \text{ EN} < +\infty.$$