

Základy fyzikálních měření

Petr Chaloupka

FJFI ČVUT, Praha

zimní semestr, 2019

Základy fyzikálních měření

zimní semestr - přednášky 2+0

letní semestr - cvičení 0+2

přednášející:

Dr. Petr Chaloupka

katedra fyziky - 221

petr.chaloupka@fjfi.cvut.cz

Ing. Libor Škoda

Vítejte na FJFI

- ▶ Teorie fyzikálních měření
 - měřicí metody, jednotky, přesnost přístrojů, chyby měření,...
 - chyby nepřímých měření
- ▶ Pravděpodobnost a statistika- nezbytné minimum
 - Centrální limitní věta, Gaussovo rozdělení,...
 - prokládání funkčních závislostí
- ▶ Zpracování protokolů
 - grafy, histogramy
 - Latex - formátovací textový program
 - GnuPlot - statistické zpracování dat
 - Python - pokud zbyde čas..
- ▶ Praktická měření - letní semestr

- ▶ **Vaše zápisky**
- ▶ J.Brož - Základy fysikálních měření (3 díly)
- ▶ Z.Horák - Praktická fysika (1958 ...)
- ▶ Tabulky - např. Matematické, fyzikální a chemické tabulky pro střední školy
- ▶ Kolektiv: Fyzika I, ČVUT Praha, 1998, 1. vyd. 103 s.
ISBN 80-01-01837-7.

1. Docházka - povoleny 3 absence

- ▶ Bonus. Pokud odevzdáte protokol udělaný na “Výborně”, pak je docházka dobrovolná až do dalšího protokolu.

2. Protokoly

- 3 protokoly za semestr
- týden na zpracování
- neuznané protokoly budou vráceny k přepracování
- protokol=individuální práce

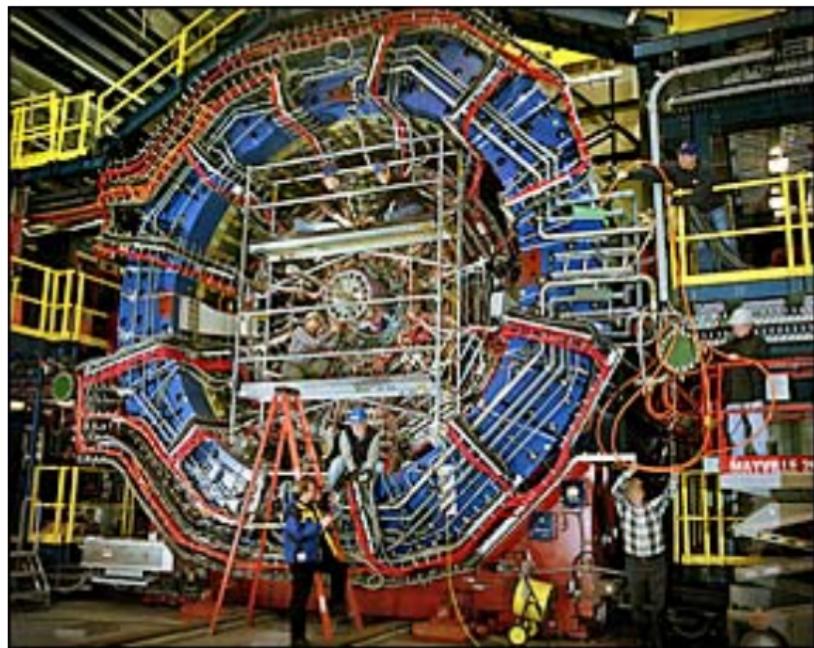
Zápočty budou udělovány na poslední hodině.

Role experimentu ve fyzice



... zábava ...

Role experimentu ve fyzice



... zábava ... ale vetsi

Role experimentu ve fyzice

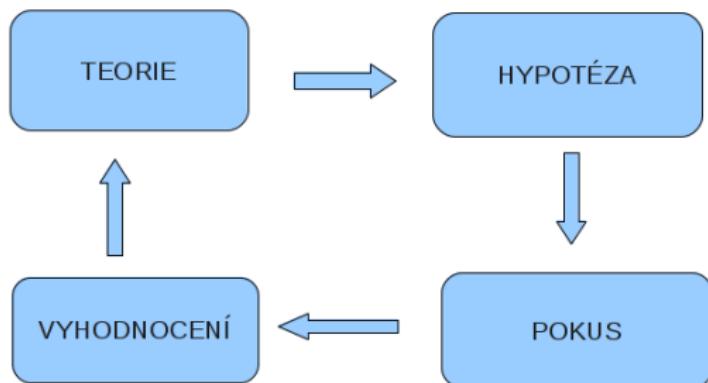
Fyzika

- empirická
- exaktní

”Vědecká metoda“

Experiment:

- pozorování nového jevu
- ověření dílčích předpovědí teorie
- možnost zamítnutí teorii



R. Feynman:

”Věda je dlouhou historií školení o tom, jak si přestat lhát do kapsy.“

- ▶ **objektivita** – maximální nezávislost na osobě experimentátora
- ▶ **konsistence** – vnitřní konsistence teorie.
- ▶ **testovatelnost** – hypotéza musí produkovat testovatelné a od ostatních hypotéz odlišitelné předpovědi
- ▶ **úspornost** – Occamova břitva
- ▶ **falzifikovatelnost** – možnost zamítnutí hypotézy na základě experimentu
- ▶ **ověřitelnost** – možnost zopakovat daný experiment v budoucnu

Einstein:

"A theory is something nobody believes except the person proposing the theory, whereas an experiment is something everybody believes except the person doing the experiment".

Cíle měření

- měřit fyzikální jevy a získat poznatky o vzájemných vztazích mezi fyzikálními veličinami, popř. zjistit velikost fyzikálních veličin.

Provádění měření

- pozorování - měření fyz. jevů, které probíhají nezávisle na nás (astronomie)
- experiment - pozorování, která jsou plánovitě připravena

Experimenty

- kvalitativní - např. zkoumání změny elektr. odporu na teplotě (růst, pokles)
- kvantitativní - určení velikosti změn elektr. odporu na teplotě

1. Příprava měření
2. Měření
3. Vyhodnocení
4. Prezentace výsledků

Příprava měření

- rešerše
- simulace
- volba přístrojů
- schéma zapojení
- ...

Měření

- sestavení a odladění
- realizace
- získání exp. dat
- ...

Vyhodnocení měření

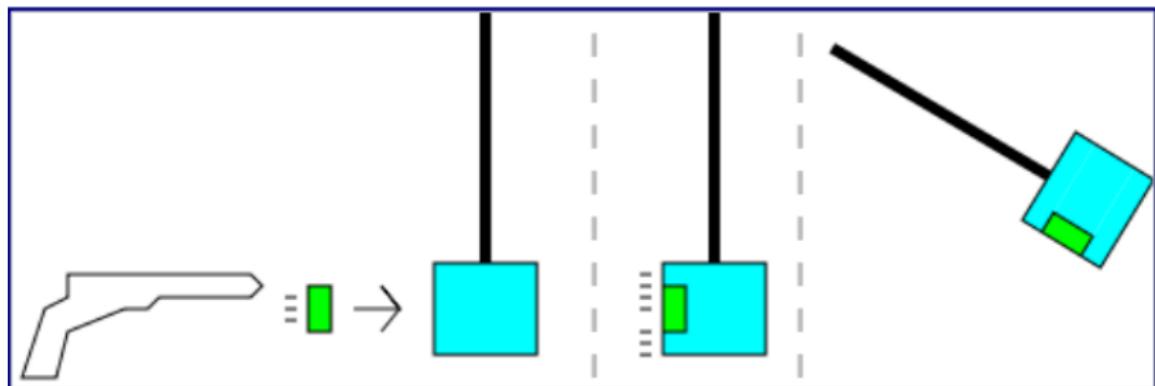
- statistické zpracování
- určení závislostí a zákonitostí
- určení přesnosti (chyb)
- porovnání s teorií
- porovnání s jinými metodami, autory, ...
- doporučení
- ...

Uvedení do praxe ...

1. **objektivní × subjektivní**
2. **absolutní**: poskytují absolutní hodnotu hledané veličiny v definovaných jednotkách, např. délku v metrech
relativní: udávají poměr dvou veličin téhož druhu, např. vážení (závaží je normálem)
3. **přímé** : měříme přímo danou veličinu dle její definice, např. měření hustoty $\rho = m/V$
nepřímé : např. určení hustoty pomocí Archimédova zákona ze síly, kterou je těleso nadlehčováno v kapalině o známé hustotě a ze znalosti váhy na vzduchu
4. **statické** : měřená veličina je stálá, určuje se z klidové polohy ukazatele
dynamické : na velikost měřené veličiny se usuzuje z periodického pohybu systému, např. určení tělového zrychlení reverzním kyvadlem
5. **kompenzační**: účinek měřené veličiny se kompenzuje stejně velkým, ale opačným účinkem veličiny téhož druhu, např. vážení, Mohrovy vážky (hustota tělesa), elektrická měření - Wheatonův můstek
6. **nulové**: zvláštní případ kompenzační metody, výchylka měřícího přístroje je 0
7. **substituční**: neznámá veličina se zaměňuje normálem téhož druhu, až se najde normál se stejnou výchylkou měřícího přístroje

Balistické kyvadlo

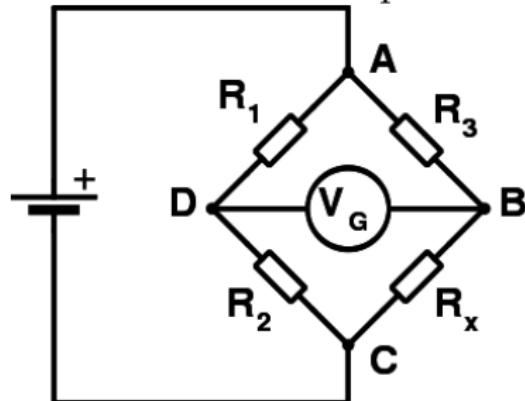
- nepřímá metoda měření rychlosti



$$v_{\text{proj}} = \frac{m_{\text{proj}} + m_{\text{kyv}}}{m_{\text{proj}}} \sqrt{2gh} \approx \frac{m_{\text{proj}} + m_{\text{kyv}}}{m_{\text{proj}}} \sqrt{\frac{g}{R}} d$$

Wheatstoneův můstek

- ukázka nulové kompenzační metody



v Rovnováze

$$V_G = 0$$

potom

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_x} \Rightarrow R_x = \frac{R_3 R_2}{R_1}$$

Měřicí aparatura

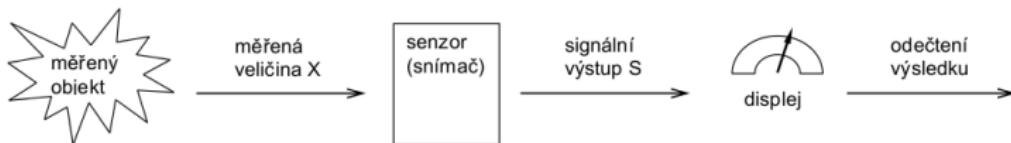
- transformuje fyz. veličinu do formy vhodné k zaznamenání

např.: přístroj = skládací metr

měřená fyz. veličina = délka objektu

měření = počet příslušných jednotek (m)

Schéma jednoduchého přístroje



Měřicí řetězec dále může obsahovat např. i zesilovač, A/D převodník, PC, ...

Charakterizují kvantitativně vlastnosti předmětů a jevů.
Můžeme je dělit:

Podle rozměrů:

- ▶ bezrozměrné (index lomu, poměry)
- ▶ s rozměrem – fyzikální veličiny
velikost vyjádřena v násobcích dobře definované jednotky

Podle počtu složek:

- ▶ skalární – pouze velikost (hmotnost délka, čas)
- ▶ vektorové – velikost a směr (rychlosť, síla, hybnost)
- ▶ tensorové – matice NxN (tenzor napětí)

Fyzikální veličiny

Hodnotu dané fyzikální veličiny X uvádíme VŽDY:
 $X = \text{velikost} \ [\text{jednotka}]$

Samostatně nemá ani jedno smysl.

Například:

$$m = 2.5\text{kg}, \ t = 5\text{s}, \ f = 10\text{s}^{-1} = 10\text{Hz}$$

Jednotky - reprodukovatelné veličiny určené na základě standardizace.

Různé systémy:

- ▶ SI - mezinárodní soustava jednotek (1960)
[m], [kg], [s], [A], [K], [Cd], [mol]
- ▶ CGS - zavedena 1832 Gaussem,
vše se vyjadřuje pomocí [cm], [g], [s]
- ▶ Angloamerická měrná soustava (USA, VB, Kanada)
inch, yard, quart, ...

Jednotky fyzikálních veličin

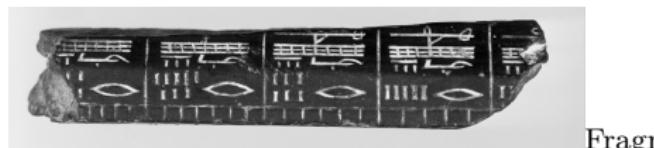
Jednotky - reprodukovatelné veličiny určené na základě standardizace.

Požadavky na standard:

- ▶ Neporušitelnost
- ▶ Stálost v čase a prostoru
- ▶ Dostupnost
- ▶ Totožnost

Standard lze definovat

- ▶ Prototypem (např. původní prototyp kilogramu z 1889)- může se časem měnit
(prototyp kilogramu ztratil cca 0.0001g za poslední století)
- ▶ Měřícím postupem - reprodukovatelné (s určitou chybou)



Fragm.

cubitum z Mezopotámie (www.nist.gov)

Jednotky fyzikálních veličin

Jednotky - reprodukovatelné veličiny určené na základě standardizace.

Požadavky na standard:

- ▶ Neporušitelnost
 - ▶ Stálost v čase a prostoru
 - ▶ Dostupnost
 - ▶ Totožnost

Standard lze definovat

- ▶ Prototypem (např. původní prototyp kilogramu z 1889)- může se časem měnit

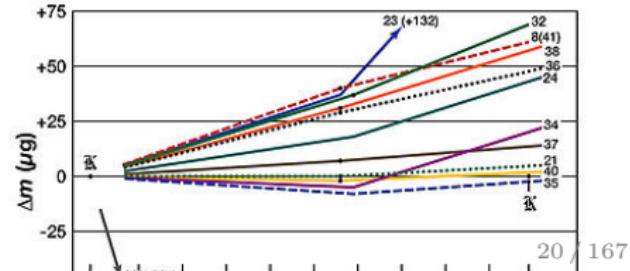
(prototyp kilogramu ztratil cca 0.0001g za poslední století)

- #### ► Měřícím postupem -



1994 - srovnání národních prototypů kilogramu

Metrologia, Vol. 31, 4, 317-336 (1994)



Soustava jednotek SI (metrická)

“Le Système International d’Unités” – “Mezinárodní systém jednotek”

- ▶ 1801: původní vznik za Francouzské revoluce
- ▶ 20.květen 1875: podpis Metrické konvence (Treaty of the Metre) v Paříži
 - přistoupilo 17 zemí (nyní 59)
 - obsahovalo pouze definici metru a kilogramu
 - založen Mezinárodní úřad pro míry a váhy (International Bureau of Weights and Measures) v Sèvres u Paříže (www.bipm.org)
 - 20.květen - Světový den metrologie (www.worldmetrologyday.org)
 - každé čtyři roky se v Sèvres schází ”General Conference on Weights and Measures”
- ▶ 1960: předěláno do v podstatě moderní podoby
 - přejmenováno na “Système International d’Unités”
- ▶ 20.květen 2019: redefinice základních jednotek pomocí fyzikálních konstant
 - první byla v 1998 redefinice metru přes rychlosť světla
 - původně se konstanty (Planckova, Boltzmannova, Avogadrova, elementárni náboj, rychlosť světla) měřily, nyní jsou to zafixované a jednotky se definují s jejich pomocí

oficiální publikace BIMP:

▶ www.bipm.org/en/publications/si-brochure/

Soustava jednotek SI

World Metrology Day

π
KAUST
Sandelin and
Cederholm
Laboratory, Hong Kong, China



Jednotky:

- ▶ Základní
- ▶ Doplňkové
- ▶ Odvozené
- ▶ Násobky a díly

Bureau
International des
Poids et
Mesures

OIML

SI

20 May 2019
www.worldmetrologyday.org

Soustava jednotek SI

Základní jednotky SI

Jméno	Symbol	veličina	Symbol veličiny
<u>metr</u>	<u>m</u>	délka	<u>l</u> , <u>x</u> , <u>r</u>
<u>kilogram</u>	<u>kg</u>	hmotnost	<u>m</u>
<u>sekunda</u>	<u>s</u>	čas	<u>t</u>
<u>ampér</u>	<u>A</u>	elektrický proud	<u>I</u>
<u>kelvin</u>	<u>K</u>	teplota	<u>T</u>
<u>kandela</u>	<u>cd</u>	svítivost	<u>I_v</u>
<u>mol</u>	<u>mol</u>	látkové množství	<u>n</u>

Vedlejší jednotky SI: minuta, hodina, den, úhlový stupeň, úhlová minuta, (úhlová) vteřina, hektar, litr, tuna.

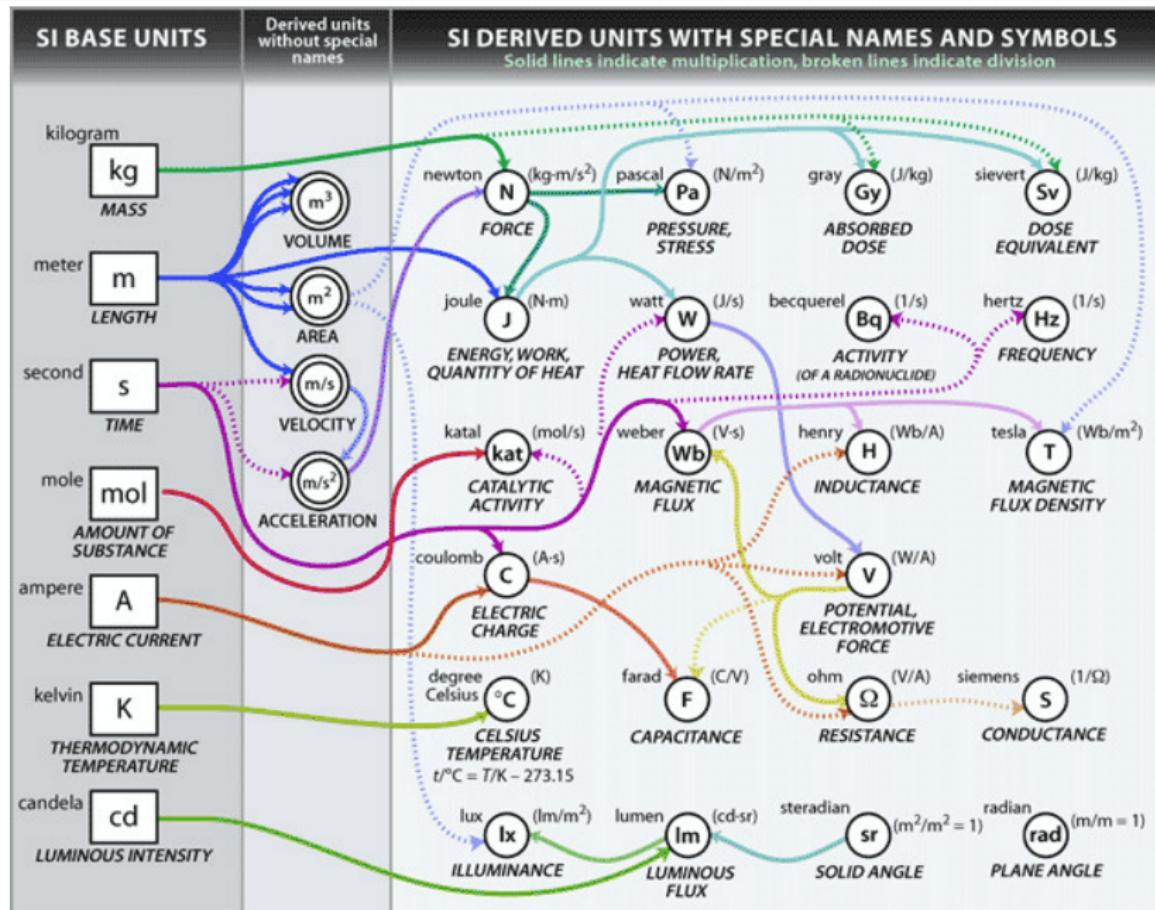
(Re)definice jednotek: www.nist.gov/si-redefinition

Soustava jednotek SI

Odvozené SI jednotky

Název	Symbol	Veličina	Vyjádření v jiných jednotkách	Vyjádření v základních jednotkách SI
hertz	Hz	<u>frekvence</u>	$1/\text{s}$	s^{-1}
newton	N	<u>síla, váha</u>	$\text{kg}\cdot\text{m}/\text{s}^2$	$\text{kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$
pascal	Pa	<u>tlak, napětí</u>	N/m^2	$\text{m}^{-1}\cdot\text{kg}\cdot\text{s}^{-2}$
joule	J	<u>energie, práce, teplo</u>	$\text{N}\cdot\text{m} = \text{C}\cdot\text{V} = \text{W}\cdot\text{s}$	$\text{m}^2\cdot\text{kg}\cdot\text{s}^{-2}$
watt	W	<u>výkon, zářivý tok</u>	$\text{J}/\text{s} = \text{V}\cdot\text{A}$	$\text{m}^2\cdot\text{kg}\cdot\text{s}^{-3}$
coulomb	C	<u>elektrický náboj</u>	$\text{s}\cdot\text{A}$	$\text{s}\cdot\text{A}$
volt	V	<u>elektrické napětí, elektrický potenciál</u>	$\text{W}/\text{A} = \text{J}/\text{C}$	$\text{m}^2\cdot\text{kg}\cdot\text{s}^{-3}\cdot\text{A}^{-1}$
ohm	Ω	<u>elektrický odpor, impedance, reaktance</u>	V/A	$\text{m}^2\cdot\text{kg}\cdot\text{s}^{-3}\cdot\text{A}^{-2}$

Soustava jednotek SI



Soustava jednotek SI

Základní předpony SI jednotek

Předpona	deca-	hecto-	kilo-	mega-	giga-	tera-	peta-	exa-	zetta-	yotta-
Symbol	da	h	k	M	G	T	P	E	Z	Y
Faktor	10^1	10^2	10^3	10^6	10^9	10^{12}	10^{15}	10^{18}	10^{21}	10^{24}

Předpona	deci-	centi-	milli-	micro-	nano-	pico-	femto-	atto-	zepto-	yocto-
Symbol	d	c	m	μ	n	p	f	a	z	y
Faktor	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}	10^{-12}	10^{-15}	10^{-18}	10^{-21}	10^{-24}

Měření a nejistota

chyba . . . nejistota versus nepřesnost

Měřená veličina X :

x_0 - skutečná hodnota (nám neznámá)

x - hodnota zjištěná měřením (náš odhad reality)

skutečná (absolutní) chyba měření

$$\epsilon = x - x_0$$

relativní chyba měření

$$\delta = \frac{\epsilon}{x_0} = \frac{x - x_0}{x_0}$$

Při fyzikálním měření se snažíme určit co *nejpravděpodobnější hodnotu* měřené veličiny a *pravděpodobnou hodnotu chyby*.

Chyby měření

1. Chyby hrubé:

např. omyl pozorovatele, měření zatížené touto chybou je nutné nebrat do úvahy, lze je rozeznat a z výsledku měření odstranit

příčiny hrubých chyb :

nedokonalost, nepřesnost měřicích přístrojů, nespolehlivost smyslů vliv okolí na měření, ...

2. Chyby systematické:

vyskytují se pravidelně, jsou dány např. povahou metody odstranění:

- ▶ dokonalejší přístroj, změna měřící metody, korekce měření, ...
- ▶ snaha potlačit je pod míru přesnosti měření

příklady :

- ▶ vážení ve vzduchu - pro látky řidší než závaží dostaneme menší váhu, pro látky hustší než závaží větší váhu kvůli vztluaku vzduchu
- ▶ měření napětí voltmetrem - dostaneme hodnoty menší než skutečné, protože vnitřní odpór voltmetru není nekonečně velký

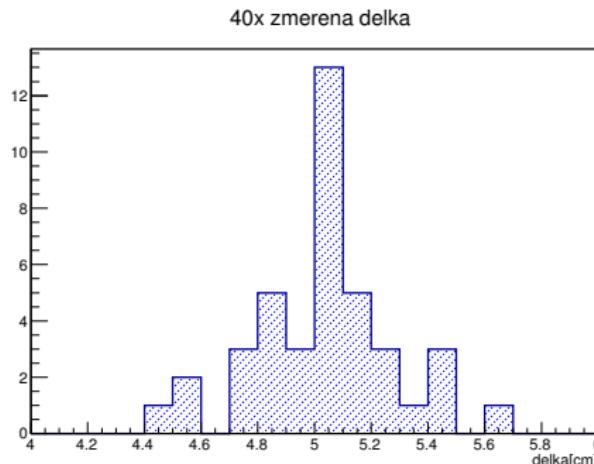
Chyby měření

3.chyby náhodné(nahodilé, statistické):

vznikají působením náhodných vlivů, které z výsledku nelze vyloučit.

hlavní oblast pro statistické zpracování dat

příklad:
opakování měření
délky

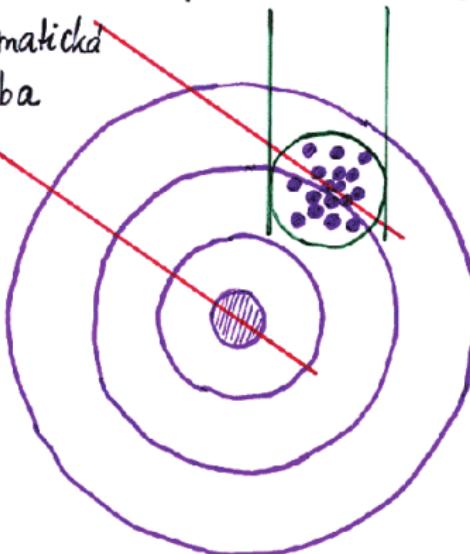


Vizuální představa

střelba do terče:

jednoduchá představa chyb: náhodila chyba

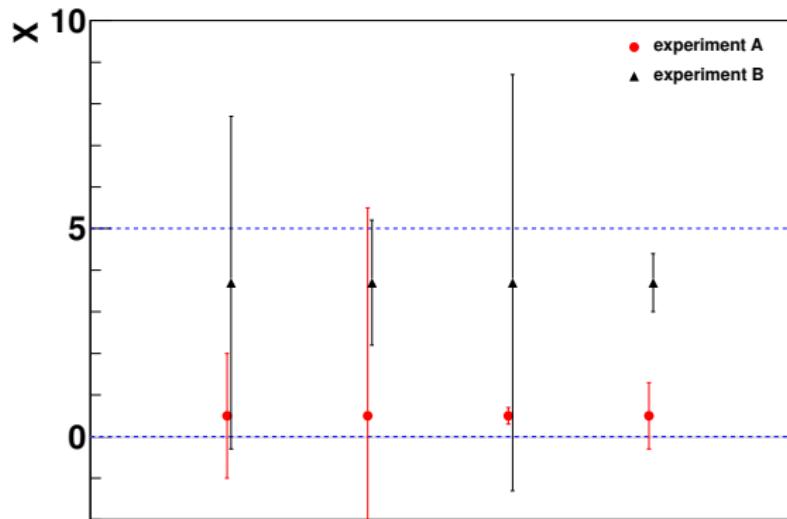
systematická chyba



Chyby měření a interpretace výsledků

Příklad:

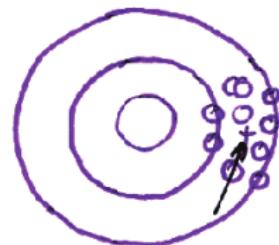
Teoretické předpovědi pro veličinu X jsou 0 nebo 5. Dva nezávislé experimenty "A" a "B" změřily $x = 0.5$ a $x = 3.7$. Interpretace výsledků závisí na chybách měření ...



Chyby měření jsou nezbytné pro fyzikální interpretaci výsledků.

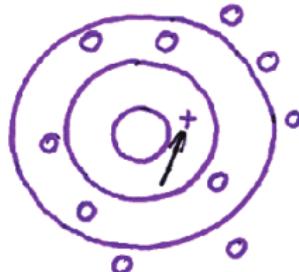
Opakovatelnost vs přesnost měření

střelba do terče: rozptyl jednotlivých hodů, poloha středu, přesnost určení středů



\bar{P}^+ = střední hodnota

"malá" náhodilá chyba (rozptyl)
systematická chyba



velký rozptyl
ale "přesnější"
rozdíl mezi středem a
střední hodnotou

Pravděpodobnost - připomenutí

Pro náhodnou diskrétní proměnnou:

Pravděpodobnost $P(A)$ jevu A je

$$P(A) = \frac{\text{počet možností kdy nastane } A}{\text{počet všech možných výsledků}}$$

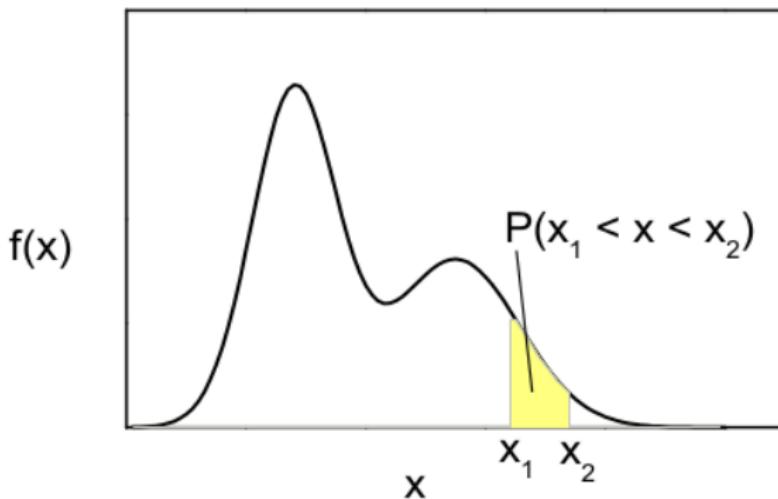
Příklad: házení mincí, nebo kostkou.

Pravděpodobnost - připomenutí

Pro náhodnou spojitou proměnnou:

Pravděpodobnost popsána hustotou pravděpodobnosti $f(x)$

- spojité funkce s $\int f(x)dx = 1$.

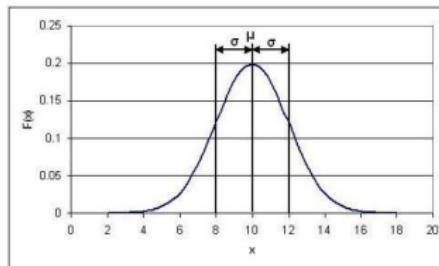


Pravděpodobnost jevu $A : x_1 < x < x_2$ je pak dána plochou pod křivkou $f(x)$:

$$P(A) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$$

Střední hodnota a rozptyl

Dvě nejzákladnější charakteristiky rozdělení náhodné veličiny jsou



Střední hodnota:

diskrétní proměnná

$$\mu = \sum_i P(X_i)X_i$$

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

Rozptyl(charakterizace šířky):

diskrétní proměnná

spojitá proměnná

$$\sigma^2 = \text{var}(X) = \sum_i P(X_i)(X_i - \mu)^2$$

$$\sigma^2 = \text{var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x)dx$$

Směrodatná odchylka: $\sigma = \sqrt{(\text{var}(X))}$

Opaková měření - odhad střední hodnoty

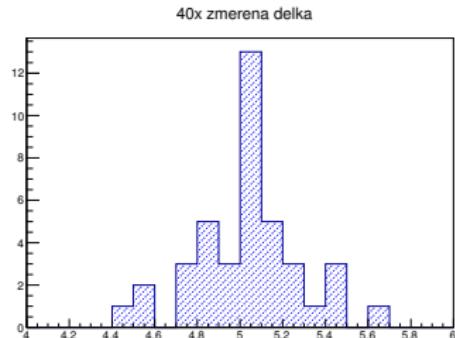
Každé měření je zatíženo náhodnými fluktuacemi. Většinou neznáme konkrétní rozdělení $f(x)$. Můžeme ale předpokládat, že měření fluktuují v průměru okolo hledané hodnoty x_0 s nějakým rozptylem σ^2 .

- ▶ chceme určit správnou hodnotu měřené veličiny x
- ▶ měření je zatíženo pouze náhodnými chybami (ne hrubými a systematickými) – tj. velkým množstvím nezávislých odchylek od správné hodnoty měřené veličiny, přičemž jednotlivé odchylky jsou se stejnou pravděpodobností kladné nebo záporné.
- ▶ Pozn: Má smysl tehdy, pokud je přednost měřicího přístroje o cca řád přesnější než požadovaná přesnost měření.

Postup:

- ▶ provedeme několik měření $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$
- ▶ Ze změrených dat odhadneme nejpravděpodobnější hodnotu měřené veličiny jako *aritmetický výběrový průměr*

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$



- ▶ Jak přesně jsme určili \bar{x} ?

Opaková měření - rozptyl jednotlivých měření

Míru fluktuace jednotlivých měření lze vyjádřit pomocí **Výběrové směrodatné odchyly s** (experimentální odhad směrodatné odchyly jednoho měření σ)

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}}$$

- ▶ odhad rozptylu rozdělení měření z naměřených dat
- ▶ s - míra "reprodukelnosti" měření

Pozor:

s (náš odhad σ) nám říká, jak moc se nám při měření "klepe ruka".

Nikoliv jak přesně jsme určili průměr \bar{x} .

K tomu potřebujeme

Centrální limitní věta

Motivace:

Pokud bychom provedli nezávisle vícekrát celé měření průměru, jak bude vypadat rozdělení \bar{x} ? A hlavně, jaká bude jeho šířka?

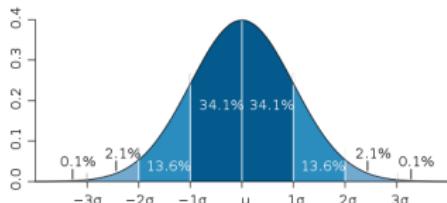
Centrální limitní věta - ve zjednodušeném znění:

Pokud provedeme n měření z neznámého rozdělení, které má průměr μ rozptyl σ^2 . Potom aritmetický průměr \bar{x} z tohoto výběru bude konvergovat ke Gaussovou(Normálnímu) rozdělení:

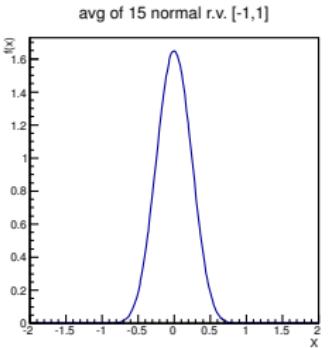
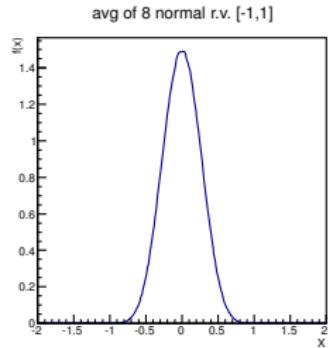
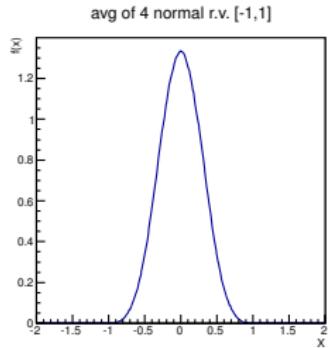
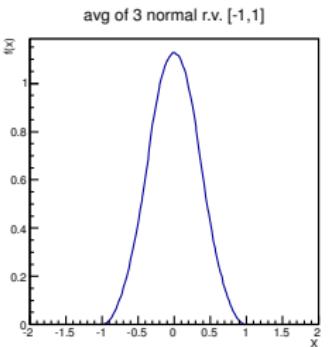
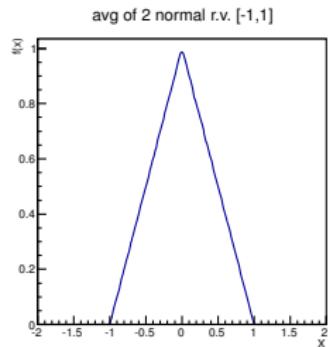
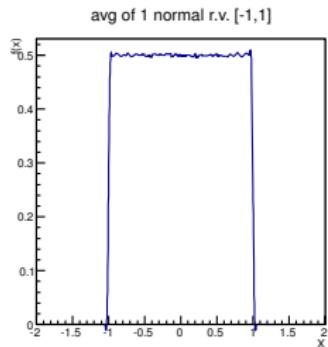
$$f(x) = N(\mu_0, \sigma_0) = \frac{1}{\sigma_0 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu_0)^2}{2\sigma_0^2}}$$

s parametry

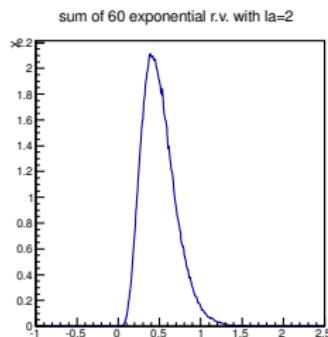
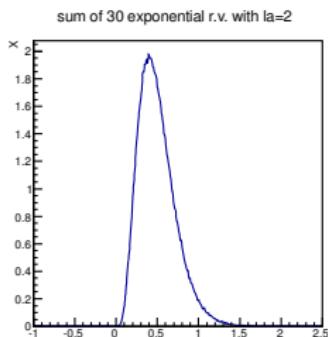
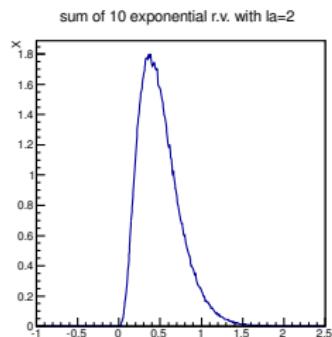
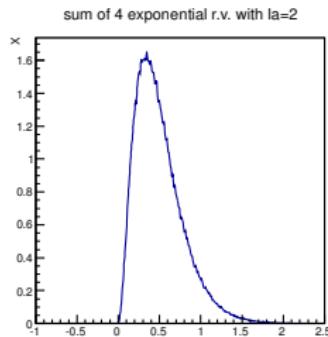
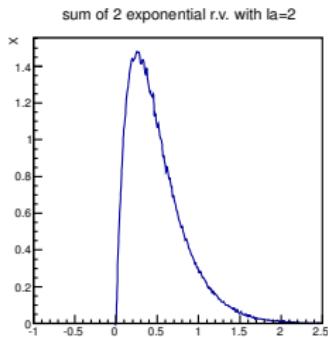
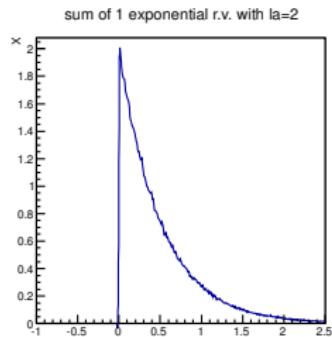
$$\mu_0 = \mu, \quad \sigma_0^2 = \frac{\sigma^2}{n} \Rightarrow \sigma_0 = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$



Centrální limitní věta



Centrální limitní věta



Odhad chyby měření

Míru přesnosti stanovení výsledku měření určuje **střední kvadratická chyba aritmetického průměru** (směrodatná odchylka aritmetického průměru):

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

při cca $n > 30$ lze nahradit

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n^2}} = \frac{1}{n} \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

Přesnost měření (určení průměru) lze tedy zlepšit:

- ▶ Snížením rozptylu jednotlivých měření σ (tj. menší změřené s)
 - lepší kontrola reprodukovatelnost: snížení šumu, lepší přístroj, ...
- ▶ Zvýšením počtu měření n
 - na desetinásobné zpřesnění experimentu potřebujeme stonásobně zvýšit statistiku

POZOR!!!

Ve fyzice (na rozdíl od statistiky) je běžné značit chybu měření jako σ nikoliv σ_0 .

Postup zpracování přímých měření

1. Změříme veličinu (např. délku tyče): $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ kde $n =$ počet měření.
2. Vyloučíme ojedinělé hodnoty, které se od ostatních výrazně liší a o nichž lze předpokládat, že jsou zatíženy hrubými chybami.
3. Určíme aritmetický průměr, který počítáme o jedno místo navíc, než bylo měřeno:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

4. Určíme odchylku každého měření:

$$\Delta x_i = \bar{x} - x_i$$

$$\text{značíme: } \Delta x_1 = \bar{x} - x_1$$

$$\Delta x_2 = \bar{x} - x_2$$

.....

Postup zpracování přímých měření

5. Určíme střední kvadratickou chybu aritmetického průměru:

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}$$

a zaokrouhlíme jí na jedno platné místo.

6. Aritmetický průměr zaokrouhlíme na stejný počet desetinných míst, jako má střední kvadratická chyba aritmetického průměru.

např.:

měříme posuvným měřítkem – tj. max. na 0,01 cm

$$\underline{\bar{x}} = 10,282 \text{ cm}$$

$$\sigma_0 = 0,481 \text{ cm} \rightarrow 0,5 \text{ cm}$$

$$\underline{\bar{x}} \rightarrow 10,3 \text{ cm}$$

Postup zpracování přímých měření

7. Výsledek měření zapíšeme ve tvaru:

$$x = (\bar{x} \pm \sigma_0) \text{ jednotka}$$

např.:

$$x = (10,3 \pm 0,5) \text{ cm}$$

nebo:

$$x = (103 \pm 5) 10^{-3} \text{ m}$$

$$x = (0,996 \pm 0,003) \text{ m} = (996 \pm 3) 10^{-3} \text{ m}$$

Příklad

měření délky objektu

naměřené výsledky (v [m]):

17,62	17,62	17,615	17,62	17,61
17,61	17,62	17,625	17,62	17,62
17,61	17,615	17,61	17,605	17,61

předpokládáme, že měření má normální rozdělení, takže nejlepším odhadem měřené veličiny je aritmetický průměr:

$$\bar{x} = 17.61533 \text{m}$$

střední kvadratická chyba aritm.průměru:

$$\sigma_0 = \frac{\sigma}{\sqrt{15}} = 0.0015 \text{ m} \rightarrow 0.002 \text{ m}$$

Příklad

měření délky objektu

naměřené výsledky (v [m]):

17,62	17,62	17,615	17,62	17,61
17,61	17,62	17,625	17,62	17,62
17,61	17,615	17,61	17,605	17,61

předpokládáme, že měření má normální rozdělení, takže nejlepším odhadem měřené veličiny je aritmetický průměr:

$$\bar{x} = 17.61533 \text{ m}$$

střední kvadratická chyba aritm.průměru:

$$\sigma_0 = \frac{\sigma}{\sqrt{15}} = 0.0015 \text{ m} \rightarrow 0.002 \text{ m}$$

výsledek:

$$\underline{\bar{x} = (17.615 \pm 0.002) \text{ m}}$$

2) Měření nestejně přesná - kombinace dat s různými chybami

úkolem je vypočítat dobu života mionu, v literatuře jsou výsledky ze 7 různých experimentů:

$$(2,198 \pm 0,001) \mu\text{s}$$

$$(2,203 \pm 0,004) \mu\text{s}$$

$$(2,202 \pm 0,003) \mu\text{s}$$

$$(2,197 \pm 0,005) \mu\text{s}$$

$$(2,198 \pm 0,002) \mu\text{s}$$

$$(2,1966 \pm 0,0020) \mu\text{s}$$

$$(2,1948 \pm 0,0010) \mu\text{s}$$

je třeba vypočítat vážený průměr

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n p_i x_i}{\sum_{i=1}^n p_i}, \quad \text{kde} \quad p_i = \frac{1}{\sigma_i^2}$$

vypočtené hodnoty :

$$\tau = 2.19696 \mu\text{s}$$

$$\sigma_0(\tau) = 0.00061 \mu\text{s}$$

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^n p_i}}$$

nejlepší hodnota pro dobu života mionu: $\tau = (2.1970 \pm 0.0006) \mu\text{s}$

Chyba měřidla

- pokud není chyba měřidla zanedbatelná vzhledem k náhodným chybám měření, určíme střední celkovou chybu takto:

$$\sigma_{x C} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_m^2}$$

kde: $\bar{x} = (\bar{x} \pm \sigma_x)$

σ_m - chyba měřidla

- uvedena výrobcem na měřidle
- nebo - odhadujeme jako zlomek nejmenšího dílku stupnice (zpravidla polovina)

Jak zpracovávat data

Výsledkem měření je písemná zpráva - protokol.

Základní pravidla:

- ▶ pravdivost
- ▶ srozumitelnost a přehlednost
- ▶ jednoznačnost
- ▶ samostatnost

Protokol musí obsahovat úplnou informaci způsobilou k tomu, aby byl experiment reprodukovatelný a data byla příp. "převzatelná" do jiné experimentální práce a to i po značném časovém odstupu od vlastního měření.

Účel protokolu je sdělit:

- ▶ jaký byl cíl měření
- ▶ jaký byl postup, pomůcky, metody
- ▶ co bylo zjištěno
- ▶ interpretace (diskuse výsledků)

Protokol:

- ▶ vypracovává se na volné listy formátu A4 a musí být včetně grafů kompaktně sešitý na levé straně.
- ▶ Protokol je možno vypracovat psaním ručně nebo na počítači nebo kombinovaně. Preferuje se ale elektronická forma.
- ▶ Musí být srozumitelný i po černo-bílém tisku.

Ukázka protokolu

FYZIKÁLNÍ PRAKTIKUM FJFI ČVUT V PRAZE

6. úloha:

Tření a napětí vzduchu a kapalin

Kopecká Nikol

Datum měření: 12. 12. 2011

Skupina: 9, pondělí 9:30

Klasifikace:

1. Pracovní úkoly:

1.1. Měření povrchového napětí kapalin

- Stanovte povrchové napětí destilované vody a lihu (při pokojové teplotě) přímým měřením na torzních vahách.
- Srovnáním s vodou určete při pokojové teplotě povrchové napětí lihu kapkovou metodou pomocí dvou až tří různých kapilár. Proveďte korekci na těkavost lihu.

1.2. Měření vnitřního tření kapalin

- Stanovte dynamickou viskozitu ricinového oleje při teplotě kolem 25 °C. Odhadněte, s jakou přesností měříte jednotlivé dílčí veličiny (tihu, průměr kulíček, délku, objem, čas, rychlosť, atd.) a pomocí vztahu

$$\sigma_u = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0^2 \sigma_y^2 + \dots} \quad (1)$$

Nástroje pro zpracování měření

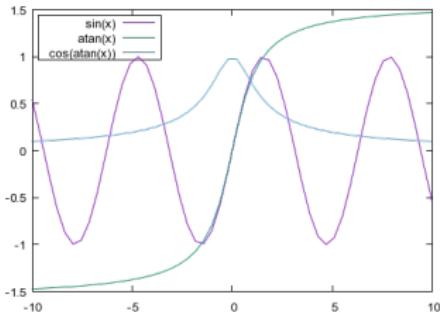
nástroje pro zpracování textu:

- ▶ MS-Word
 - Windows, Mac
 - WYSIWYG-What you see is what you get
 - placený
- ▶ LibreOffice(OpenOffice) www.libreoffice.org
 - Windows, Linux
 - zdarma
- ▶ latex : www.latex-project.org
 - zdarma
 - kompiluje text
 - všechny platformy, většinou součást distribuce linux

Nástroje pro zpracování měření

nástroje pro zpracování dat:

- ▶ MS-Excel
 - Windows, Mac
 - placený
 - snadný, ale podceňovaný
- ▶ LibreOffice(OpenOffice)
 - Windows, Linux
 - zdarma
- ▶ GNUMplot : www.gnuplot.info
 - zdarma
 - příkazová řádka, makra
 - snadné fitování a práce se soubory dat
- ▶ další : ROOT, Mathematica, Stata, RapidMiner,dle osobních preferencí



Zobrazení dat

tabulka: přehledný zápis všech zpracovaných hodnot

- záhlaví: měřená veličina, jednotky
- hodnoty: uvedené na stejný počet změřených desetinných míst
- legenda: očíslování – lze se pak odkazovat z textu
legenda – stručný popis

I[cm]
5.073
4.500
4.911
5.037
5.556
5.522
4.915
4.820
4.673
5.187

Tab. 1: Změřené hodnoty délky

Zobrazení dat

tabulka: přehledný zápis všech zpracovaných hodnot

- záhlaví: měřená veličina, jednotky
- hodnoty: uvedené na stejný počet změřených desetinných míst
- legenda: očíslování – lze se pak odkazovat z textu
legenda – stručný popis

I[cm]
5.073
4.500
4.911
5.037
5.556
5.522
4.915
4.820
14.673
5.187

současné měření více
veličin(délka a čas):

I[cm]	t[s]
5.073	8.546
4.500	7.495
4.911	8.786
5.037	7.334
5.556	9.436
5.522	12.601
4.915	7.951
4.820	6.808
4.673	11.068
5.187	7.773

Tab. 1: Změřené hodnoty délky

Tab. 1: Změřené hodnoty délky a času

Odhad průměru a chyby

- Odhad měřené hodnoty pomocí aritmetického průměru měření

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

$$\bar{l} = 5.0194$$

I[cm]
5.073
4.500
4.911
5.037
5.556
5.522
4.915
4.820
4.673
5.187

Odhad průměru a chyby

- Odhad měřené hodnoty pomocí aritmetického průměru měření

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

$$\bar{l} = 5.0194$$

- Odhad chyby aritmetického průměru

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}$$

$$\sigma = 0.1067$$

$l[\text{cm}]$	$l - \bar{l} [\text{cm}]$
5.073	0.054
4.500	-0.519
4.911	-0.108
5.037	0.018
5.556	0.537
5.522	0.503
4.915	-0.104
4.820	-0.199
4.673	-0.346
5.187	0.168

Odhad průměru a chyby

- Odhad měřené hodnoty pomocí aritmetického průměru měření

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

$$\bar{l} = 5.0194$$

- Odhad chyby aritmetického průměru

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}$$

$$\sigma = 0.1067$$

- Zaokrouhlení na jednu platnou cifru chyby

- nezapomenu jednotky

- uvedu v tabulce

$$l = (5.0 \pm 0.1) \text{ cm}$$

I[cm]
5.073
4.500
4.911
5.037
5.556
5.522
4.915
4.820
4.673
5.187

průměr:	5.0
chyba:	0.1

Tab. 1: Změřené hodnoty délky

- Příklad – měření doby pádu kuličky v kapalině (měření viskozity)

t[s]	
1. typ kuličky	2. typ kuličky
15,8	48,5
16,21	48,14
16,45	47,87
14,89	48,1
16,29	48,38
16,81	47,49
17,43	47,73
15,32	48,91
14,58	48,03
15,67	47,47
průměr:	15,9
chyba:	0,3
	48,1
	0,1

Tab. 4: Naměřené časy pádů kuliček

Vyloučení hrubých chyb

- občas může dojít k výrazné chybě měření – podezření na nestatistickou chybu

příklad: opaková měření délky (v cm)

5.073

4.911

6.556

4.915

4.673

4.5

5.037

5.522

4.82

5.187

Vyloučení hrubých chyb

- občas může dojít k výrazné chybě měření – podezření na nestatistickou chybu

příklad: opakování měření délky (v cm)

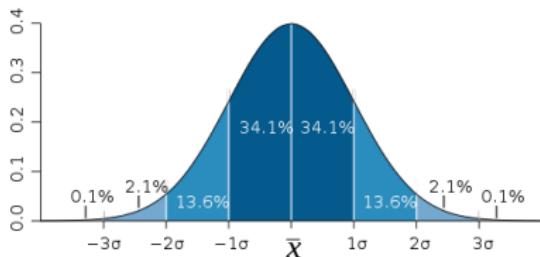
5.073	4.911	6.556	4.915	4.673
4.5	5.037	5.522	4.82	5.187

- pokud jsou chyby statistické mělo by se jejich rozdělení řídit Gaussovým rozdělením:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}$$

σ – směrodatná odchylka jednoho měření (reprodukčnost)

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_i)^2}{n-1}}$$



- velmi malá šance, že měření bude více jak 3σ vzdáleno od průměru

Vyloučení hrubých chyb

- optická kontrola dat – tabulka, graf, ...
- Učím průměr a směrodatnou odchylku jednoho měření

$$\bar{l} = 5.1873 \quad \sigma = 0.772$$

- Pokud je

$$\frac{|x_j - \bar{x}|}{\sigma} > 3$$

můžu uvažovat o vyjmutí daného měření ze zpracování

- Následuje přeypočítání průměru a chyby

$$\bar{l} = 4.9598 \quad \sigma = 0.2966$$

výsledek: $l = (5.0 \pm 0.3) \text{ cm}$

- **Pozor!**

- používat velmi opatrně
- maximálně vyřadit jednu hodnotu
- vždy je potřeba se pokusit zjistit, jak došlo k chybě a provést v protokolu diskusi

$l[\text{cm}]$	$\frac{l - \bar{l}}{\sigma}$
5.073	0.013
4.500	0.472
4.911	0.076
5.037	0.023
7.235	4.193
5.522	0.112
4.915	0.074
4.820	0.135
4.673	0.264
5.187	0.000

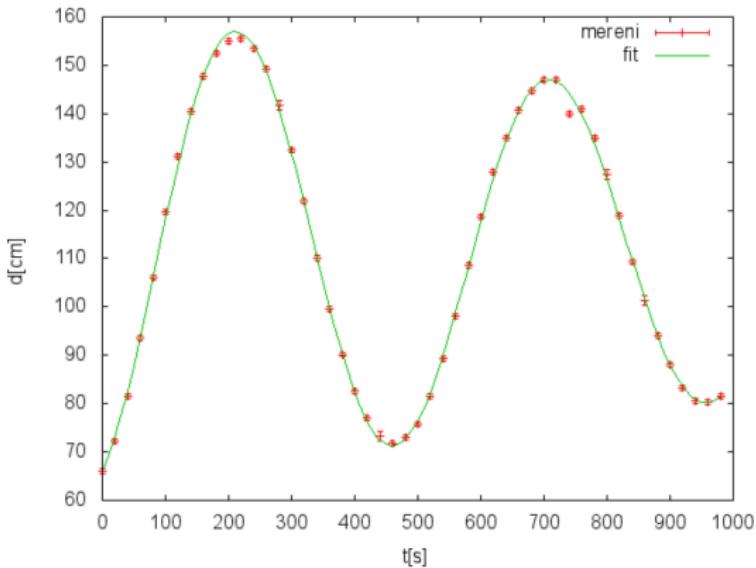
Domácí úkol

- Zpracování měření a části protokolu:
 - elektronické zpracování
 - graficky upraveno
 - vytisknuto jednostranně A4,
 - obsah
 - hlavička: jméno, datum, nadpis...
 - statisticky zpracovaná data: tabulka, výsledky
 - popisný text: popis postupu, vzorečky, odkaz na data, diskuse
 - přiložit původní výtisk s daty
 - jinak nelze zkontolovat a uznat
- Odevzdání na začátku příští hodiny
- Samostatná práce
 - není známkováno, ale podmínka zápočtu
 - nepovedené práce budou vráceny k přepracování
- příklady protokolů a informace na: praktika.fjfi.cvut.cz

Zobrazení dat

Důležité pro získání přehledu o provedeném měření:

- ▶ zjištění závislostí
- ▶ odhalení chyb



Obrázek 4: Závislost výchylky na čase, měření 1

možná chyba ...

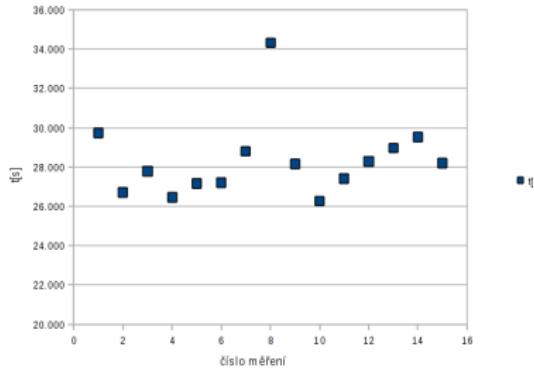
změřená vlastnost

Histogramy

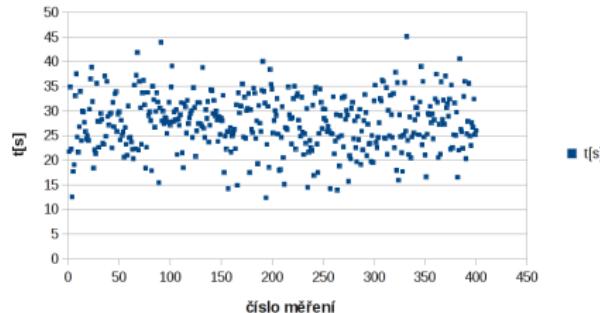
Z domácího úkolu:

číslo měření	t[s]
1	29.729
2	26.711
3	27.787
4	26.457
5	27.158
6	27.200
7	28.801
8	34.318
9	28.157
10	26.264
11	27.404
12	28.274
13	28.964
14	29.513
15	28.193

graf:



pro 400 hodnot....



Jak snadno a přehledně
zobrazit data, zjistit chyby?

Lépe použít histogram.

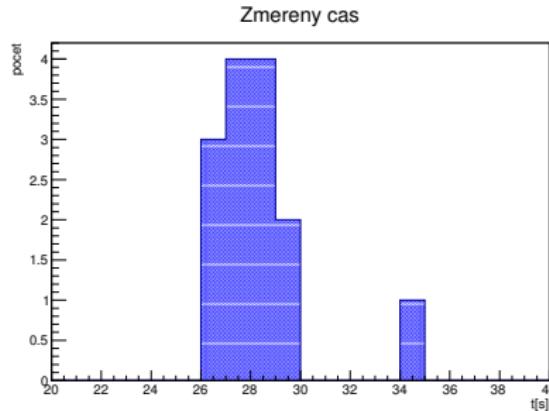
Histogramy

Z domácího úkolu:

číslo měření	t[s]
1	29.729
2	26.711
3	27.787
4	26.457
5	27.158
6	27.200
7	28.801
8	34.318
9	28.157
10	26.264
11	27.404
12	28.274
13	28.964
14	29.513
15	28.193

Většinou mi nezáleží na tom jaké je ”číslo měření“. Chtěl bych něco jako četnosti na ose y.

Chci zobrazit počet měření, které ”spadly“ na ose y do intervalů určité šířky - tzv. “šířka binu“. V tomto případě použiji šířku=1



Jak snadno a přehledně zobrazit data, zjistit chyby?

Histogramy - příklad použití

Digitální fotografie - spektrum

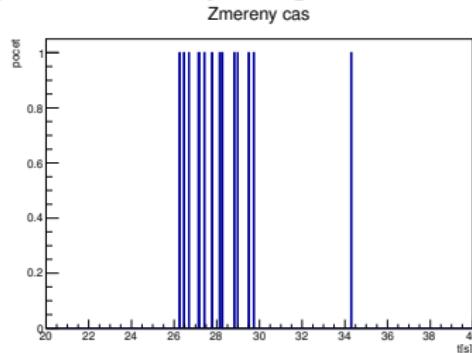


... což není nic jiného, než měření energetického spektra fotonů.

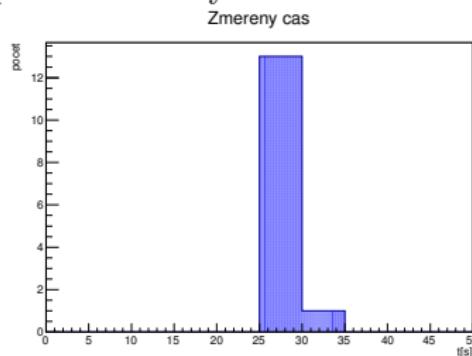
Histogramy šířka binu

Rozlišení na ose X (šířka binu) - ztráta informace vs. přehlednost:

příliš úzké biny - nepřehledné



příliš široké biny - ztráta informace:



Histogramy v Excelu

Chci zobrazit počet měření, které "spadly" na ose y do intervalů určité šířky - tzv. "šířka binu". V tomto případě použiju šířku=1

FREQUENCY

f(x) ✘ ✓ =FREQUENCY(C6:C20,E6:E21)

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2								
3								
4								
5		číslo měření	t[s]		bin osy y			
6		1	29.729		22	0		
7		2	26.711		23	0		
8		3	27.787		24	0		
9		4	26.457		25	0		
10		5	27.158		26	0		
11		6	27.200		27	3		
12		7	28.801		28	4		
13		8	34.318		29	5		
14		9	28.157		30	2		
15		10	26.264		31	0		
16		11	27.404		32	0		
17		12	28.274		33	0		
18		13	28.964		34	0		
19		14	29.513		35	1		
20		15	28.193		36	0		
21					37	=FREQUENCY(C6:C20,E6:E21)		
22								
23								

Použiji funkci FREQUENCY.

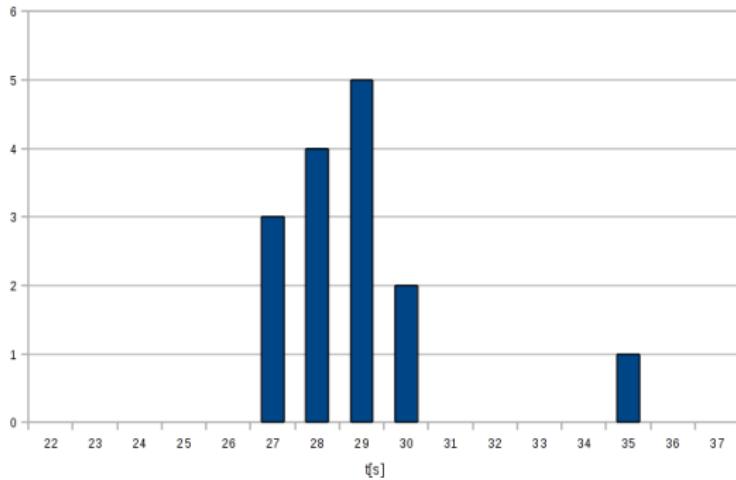
Pozor finta - vkládám pole pomocí Ctrl+Enter.

odkaz: <http://www.ncsu.edu/labwrite/res/gt/gt-bar-home.html>

Histogramy v Excelu

Teprve nyní mohu vložit "bar chart":

Číslo měření	t[s]
1	29.729
2	26.711
3	27.787
4	26.457
5	27.158
6	27.200
7	28.801
8	34.318
9	28.157
10	26.264
11	27.404
12	28.274
13	28.964
14	29.513
15	28.193



Lze dobře vidět, kde se shlukují změřené hodnoty a případné problémy.

Ještě jeden háček ... na ose x jsou uvedeny počátky binů. Správně by tam měly být středy - tj. 22.5 23.5

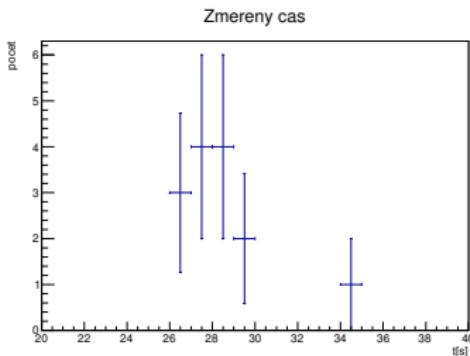
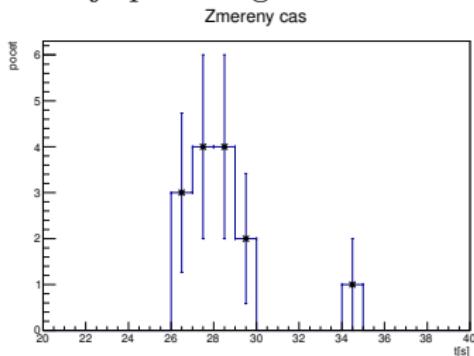
Histogramy - statistická chyba

I v histogramu jsou statistické chyby

Pokud histogram zaznamenává počty měření, pak se rozdělení uvnitř každého binu řídí Binomickým rozdělením a chyba je

$$\sigma_X = \sqrt{N} \Rightarrow \frac{\sigma_X}{X} = \frac{1}{\sqrt{N}},$$

kde N je počet registrací měření v binu X.

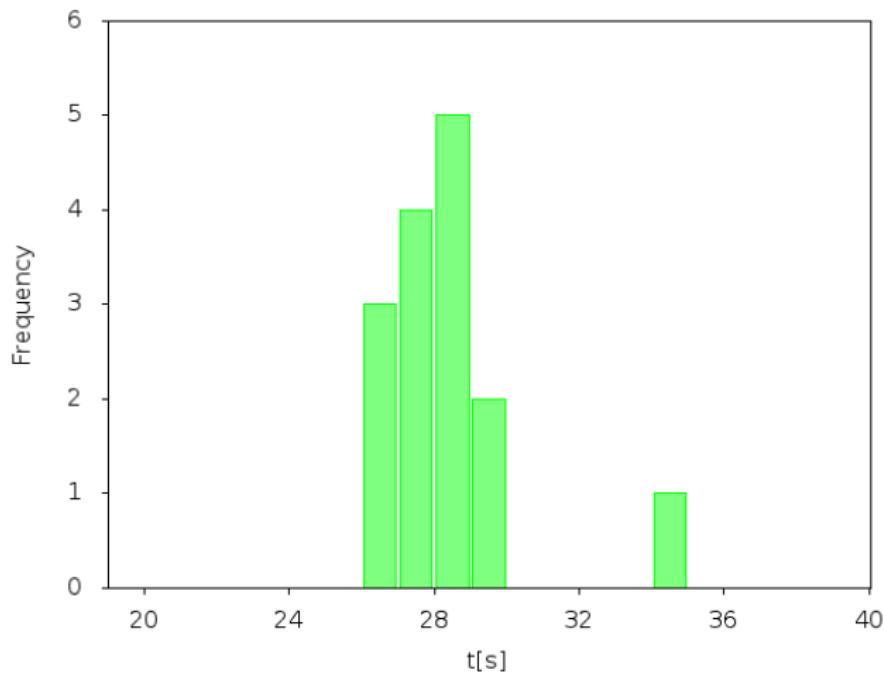


Histogramy v GNUplot

Skript pro GNUplot:

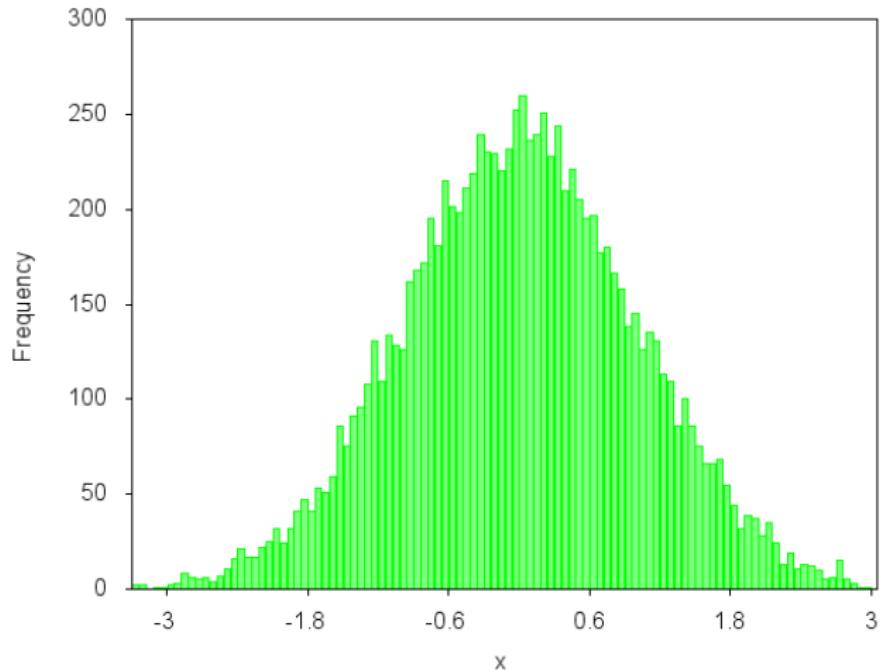
```
reset
n=20 #number of intervals
max=40. #max value
min=20. #min value
width=(max-min)/n #interval width
#function used to map a value to the intervals
hist(x,width)=width*floor(x/width)+width/2.0
set term png #output terminal and file
set output "histogram.png"
set xrange [min:max]
set yrange [0:]
#to put an empty boundary around the
#data inside an autoscaled graph.
set offset graph 0.05,0.05,0.05,0.0
set xtics min,(max-min)/5,max
set boxwidth width*0.9
set style fill solid 0.5 #fillstyle
set tics out nomirror
set xlabel "t[s]"
set ylabel "Frequency"
#count and plot
plot "data.txt" u (hist($1,width)):(1.0) smooth freq w boxes lc rgb"green" notitle
```

Histogramy v GNUplot



Histogramy v GNUplot

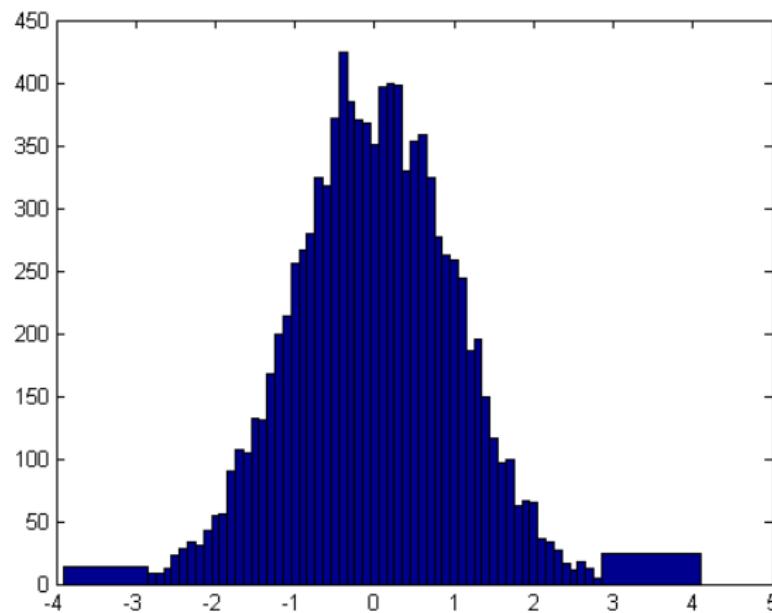
Pro 1000 náhodně generovaných hodnot z Gaussova rozdělení



Histogramy MatLab

Obdobně v MatLabu:

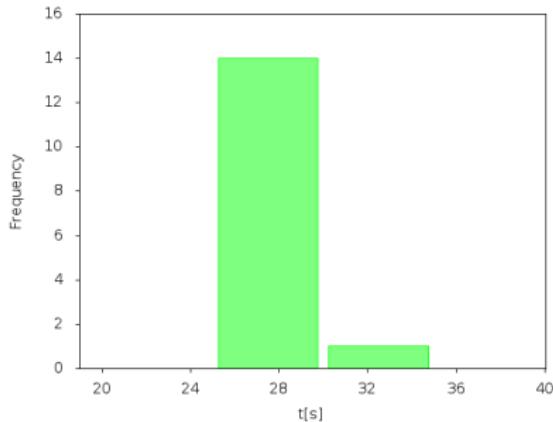
```
x = -4:0.1:4;  
y = randn(10000,1);  
hist(y,x)
```



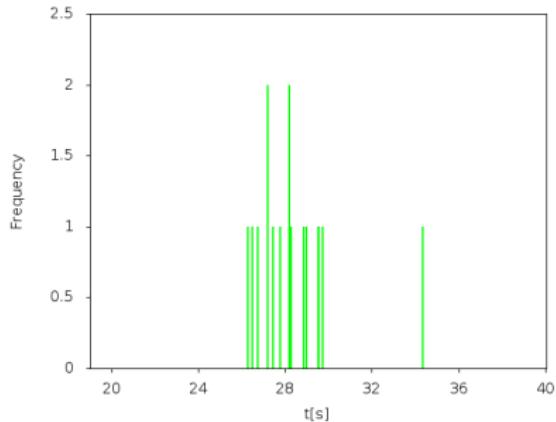
Histogramy - šířka binu

Důležitá je rozumná volba šířky binu:

$$\Delta x = 5s$$



$$\Delta x = 0.1s$$

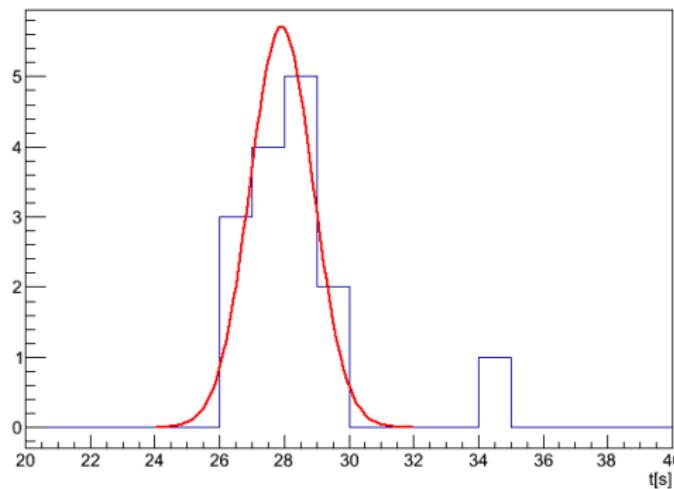


Ztráta informace versus nepřehlednost.

Histogramy

- ▶ Vizuální reprezentace data
- ▶ Zobrazuje rozdělení četnosti
- ▶ Souvisí s pravděpodobnostním rozdělením zobrazované veličiny

Lze testovat data: např. odhalení a vyloučení hrubých chyb



Chyby nepřímých měření

nepřímé měření:

- chceme určit veličinu z hodnot jiných veličin na základě funkční vztahu
- máme změřené veličiny pomocí přímých měření (viz. dříve) včetně chyb:

$$\bar{x} \pm \sigma_x, \bar{y} \pm \sigma_y, \dots$$

- známe vztah pro hledanou veličinu

$$w = f(x, y, \dots)$$

- chceme spočítat střední hodnotu a její chybu

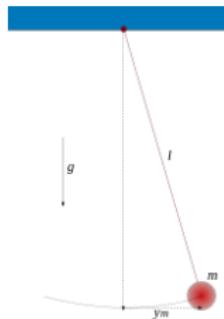
$$w = \bar{w}(x, y, \dots) \pm \sigma_w(x, y, \dots)$$

Chyby nepřímých měření-příklad

Příklad: určení tíhového zrychlení g pomocí kyvadla.

- přímo změřená délka kyvadla l
- přímo změřená doba kmity T
- funkční závislost pro tíhové zrychlení

$$g = g(l, T) = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$$



- určení odhadované průměrné hodnoty g – dosazení

$$\bar{g} = \frac{4\pi^2 \bar{l}}{\bar{T}^2}$$

- určení chyby průměru – méně triviální,

Chyby nepřímých měření-příklad

$$g = g(l, T) = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$$

- Jakou změnu g vyvolá změna T nebo l ?
 - závisí na velikosti změny $\Delta T, \Delta l$
 - závisí na síle závislosti g na T a l ,
tj. derivaci $\frac{\partial g}{\partial T}, \frac{\partial g}{\partial l}$
- Pro malé změny $\Delta T, \Delta l$ pak lze psát

$$\Delta g_l = \left(\frac{\partial g}{\partial l} \right) \cdot \Delta l,$$

$$\Delta g_T = \left(\frac{\partial g}{\partial T} \right) \cdot \Delta T$$

Chyby nepřímých měření

- Obecně pro neznámou veličinu

$$w = f(x, y, \dots) \quad \bar{x} \pm \sigma_x, \bar{y} \pm \sigma_y, \dots$$

- výpočet chyby

$$\sigma_w^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \sigma_y^2 + \dots$$

tudíž

$$\sigma_w = \sqrt{\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \sigma_y^2 + \dots}$$

tj. chyby se „sčítají v kvadrátech“...

Pro jednoduché $w(x,y)$

- násobení konstantou: $w(x,y) = kx$, k -konstanta

$$\frac{\partial w}{\partial x} = k, \quad \sigma_w^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \sigma_x^2 = k^2 \sigma_x^2 \implies \sigma_w = k \sigma_x$$

prosté násobení chyby

- chyba součtu(rozdílu) $w(x,y) = x \pm y$

$$\left| \frac{\partial w}{\partial x} \right| = \left| \frac{\partial w}{\partial y} \right| = 1$$

$$\sigma_w = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$$

součet kvadrátů absolutních chyb

Pro jednoduché $w(x,y)$

- součin: $w(x,y) = xy$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = x$$

$$\sigma_w = \sqrt{y^2 \sigma_x^2 + x^2 \sigma_y^2} \quad /: xy \quad \Rightarrow \quad \frac{\sigma_w}{w} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2}$$

sčítání kvadrátu relativních chyb, platí i pro podíl

- chyba mocniny (odmocniny) $g(x,y) = x^k$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = kx^{(k-1)}$$

$$\sigma_w = kx^{(k-1)} \sigma_x \quad /: w \quad \Rightarrow \quad \frac{\sigma_w}{w} = k \cdot \frac{\sigma_x}{x}$$

Chyby nepřímých měření-příklad

Zpět k příkladu s kyvadlem

$$g = g(l, T) = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$$

- ze vzorce pro chybu podílu a mocniny

$$\frac{\sigma_g}{g} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_l}{l}\right)^2 + \left(\frac{2\sigma_T}{T}\right)^2}$$

silnější závislost na chybě T – je vhodné měřit T s dvojnásobnou přesností než l

- Pozor při měření $T = T_1 - T_2$
 - rozdíl dvou velkých čísel = malé číslo
 - chyba: součet dvou chyb
 - nárůst relativní chyby

Maximální odhad chyby

Chceme rychle a “bezpečně” odhadnout chyby

- ▶ nadhodnocené chyby nevadí (většinou …), podhodnocené vadí
- ▶ většinou před měřením pro odhad potřebné přesnosti

namísto:

$$\sigma_w = \sqrt{\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \sigma_y^2 + \dots}$$

použijeme:

$$\Delta_w = \left| \frac{\partial w}{\partial x} \right| \Delta_x + \left| \frac{\partial w}{\partial y} \right| \Delta_y + \dots$$

nebo:

$$\sigma_w = \sqrt{\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 (\Delta_x)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 (\Delta_y)^2 + \dots}$$

Nepřímá měření příklad

- Měření hustoty tělesa podle

$$\rho = \frac{m}{V}$$

1. Tabulka změrených hodnot

2. Vyloučení hrubých chyb

3. Výpočet průměrů a chyb přímých měření

4. Určení průměru počítané veličiny

$$\rho = \frac{m}{V} = 12.5480 \text{ g/cm}^3$$

5. Výpočet chyby podle vzorce pro podíl nepřímých měření

$$\frac{\sigma_\rho}{\rho} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_V}{V}\right)^2}$$

$$\sigma_\rho = 0.122 \text{ g/cm}^3$$

6. Závěr
 $\rho = (12.5 \pm 0.1) \text{ g/cm}^3$

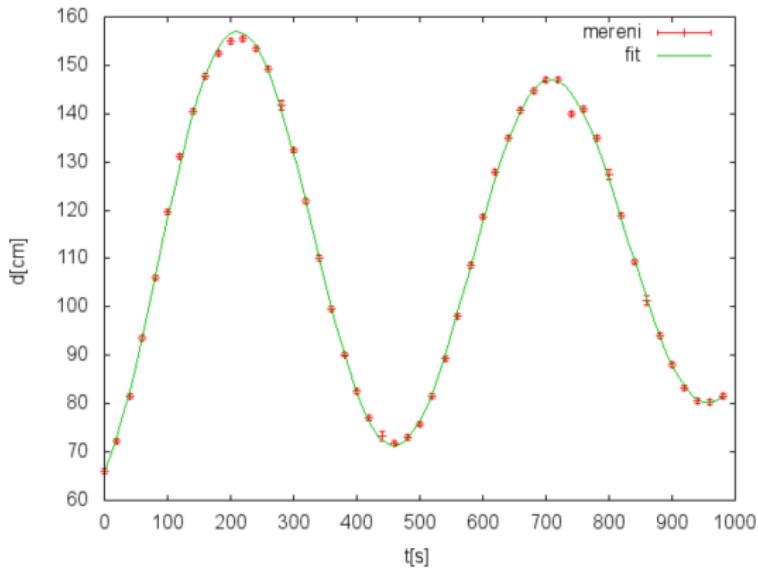
	m[g]	V[cm ³]
	131.2	10.32
	130.7	10.62
	130.0	10.58
	129.8	9.98
	130.6	10.46
	130.8	10.70
průměr	130.5	10.40
chyba	0.2	0.1

Tab. 1: Hmotnost a objem tělesa

Zobrazení dat

Důležité pro získání přehledu o provedeném měření:

- ▶ zjištění závislostí
- ▶ odhalení chyb



Obrázek 4: Závislost výchylky na čase, měření 1

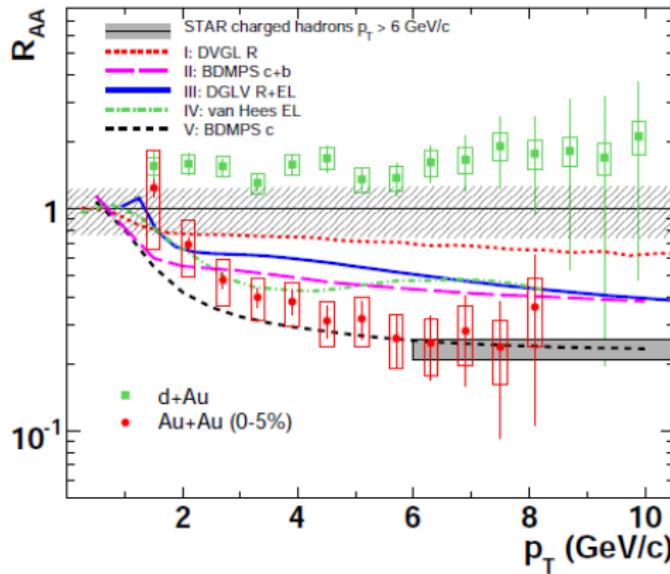
možná chyba ...

změřená vlastnost

Zobrazení dat

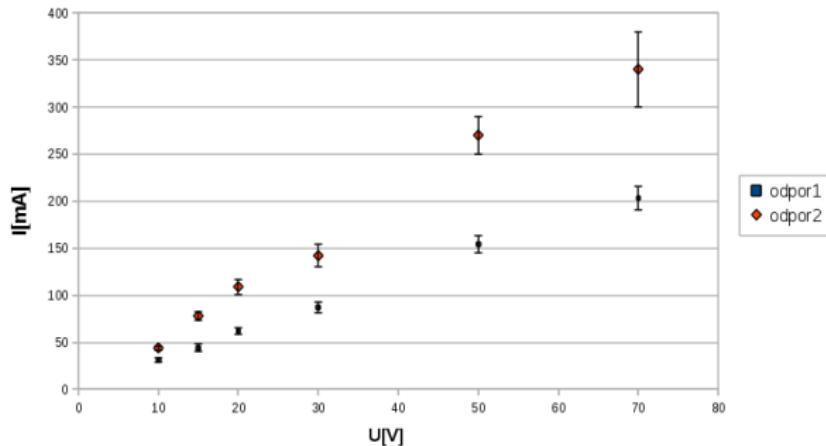
Dovoluje srovnání dat s teorií

- ▶ Lze vyvrátit předpovědi různých teorií
 - lze pouze s pomocí dat



Kreslení grafů

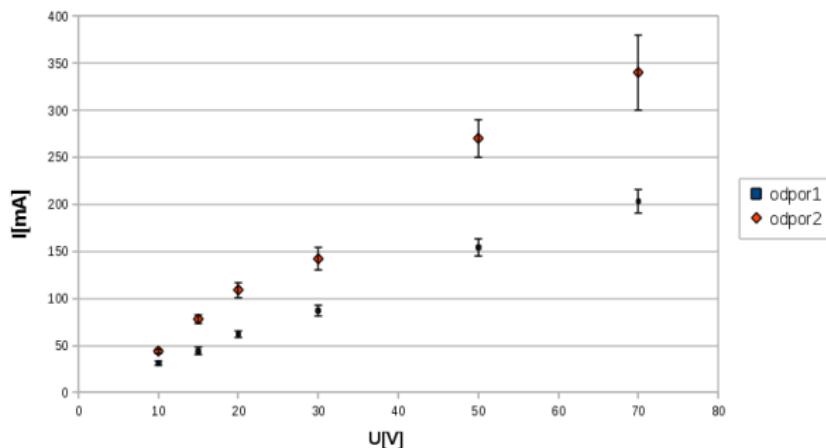
- ▶ Osy:
 - nezávislá proměnná na vodorovnou osu, závislá na svislou osu.
 - popis: symboly veličin společně s jejich rozměry.
 - vhodně zvolená stupnice - hlavní a vedlejší dělení. Hlavní dílky stupnice vyznačeny číselným údajem.
- ▶ Stručný popis pod grafem začínající "Obr. číslo". Písmo popisu je shodné s typem a velikostí písma běžného textu.
- ▶ Graf by měl být dostatečně velký (min. formát A5).



Obr.1: Změřená závislost proudu na přiloženém napětí pro dvě hodnoty odporu.

Kreslení grafů

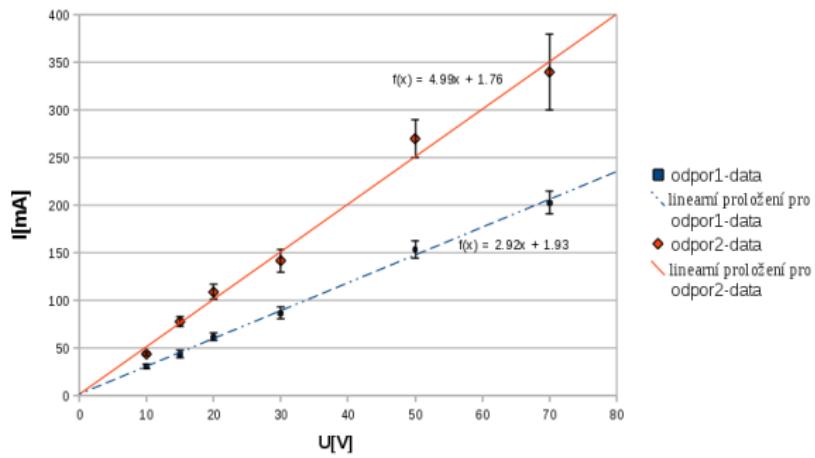
- ▶ Zobrazované hodnoty VŽDY s chybami
 - Pokud je hodnota 13.6 ± 0.2 pak je bod v 13.6 a vertikální úsečka od 13.4 – 13.8.
 - Chyby mohou být asymetrické
- ▶ Body zobrazujte pomocí vhodných grafických symbolů (kříže, kolečko, čtvereček, diamant,...) a nekótujte je.



Obr.1: Změřená závislost proudu na přiloženém napětí pro dvě hodnoty odporu.

Kreslení grafů

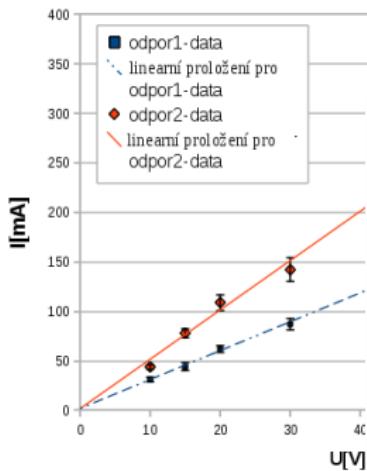
- ▶ Body nespojujte, ale prokládejte očekávanou závislostí.
- ▶ V případě, že je potřeba aby graf obsahoval více závislostí, odlište tyto závislosti různým typem čáry (plná, čárkovaná, čerchovaná,...) a různým typem grafického symbolu.
- ▶ Data a křivky musí být označeny uvnitř obrázku.
- ▶ U každé křivky musí být uvedeno, jakou závislost představuje.



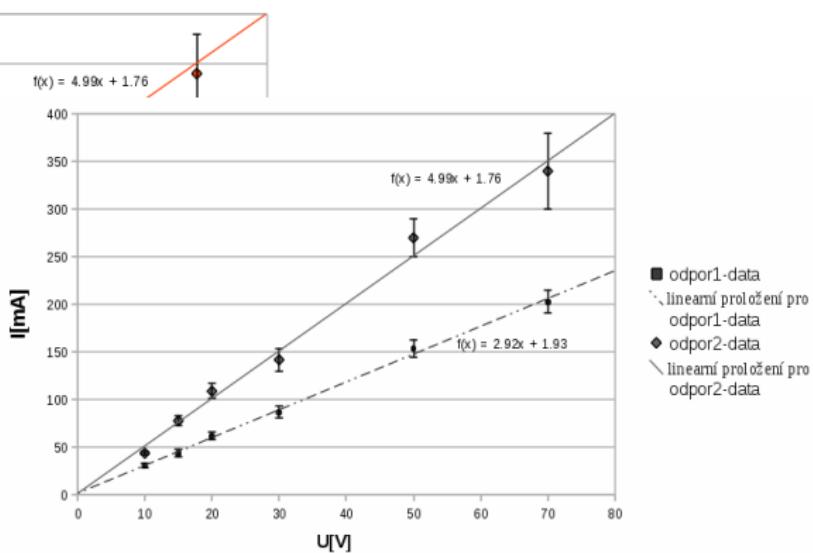
Obr.1: Změřená závislost proudu na přiloženém napětí pro dvě hodnoty odporu.

Kreslení grafů

- ▶ Popisky dat mohou být umístěny uvnitř grafu, popřípadě v popisu obrázku.
- ▶ Graf musí být čitelný i v černo-bílé verzi.



Obr.1: Změřená závislost proudu na přiloženém napětí pro dva hodnoty odporu.

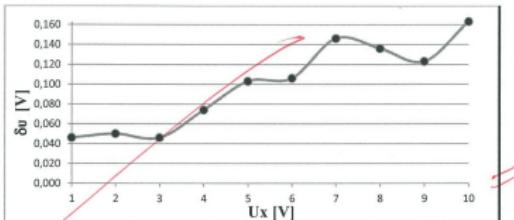


Obr.1: Změřená závislost proudu na přiloženém napětí pro dva hodnoty odporu.

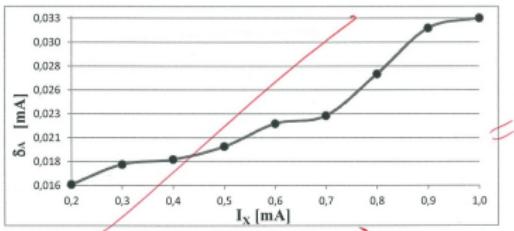
Špatné příklady

3.3.2. Grafické závislosti

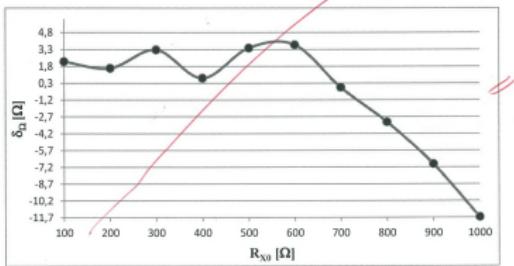
TO TO NE JSEM VTELIL VŠECHNIH - HUH / VÍM !
+ BODY NEPLŇUJU DÁTAK LZE ZEJMENOU ČÍSLOVANÍ.



Graf č. 1: Kalibračná krivka volmetra meraného napätia U_x v závislosti na odchýlke δ_U .

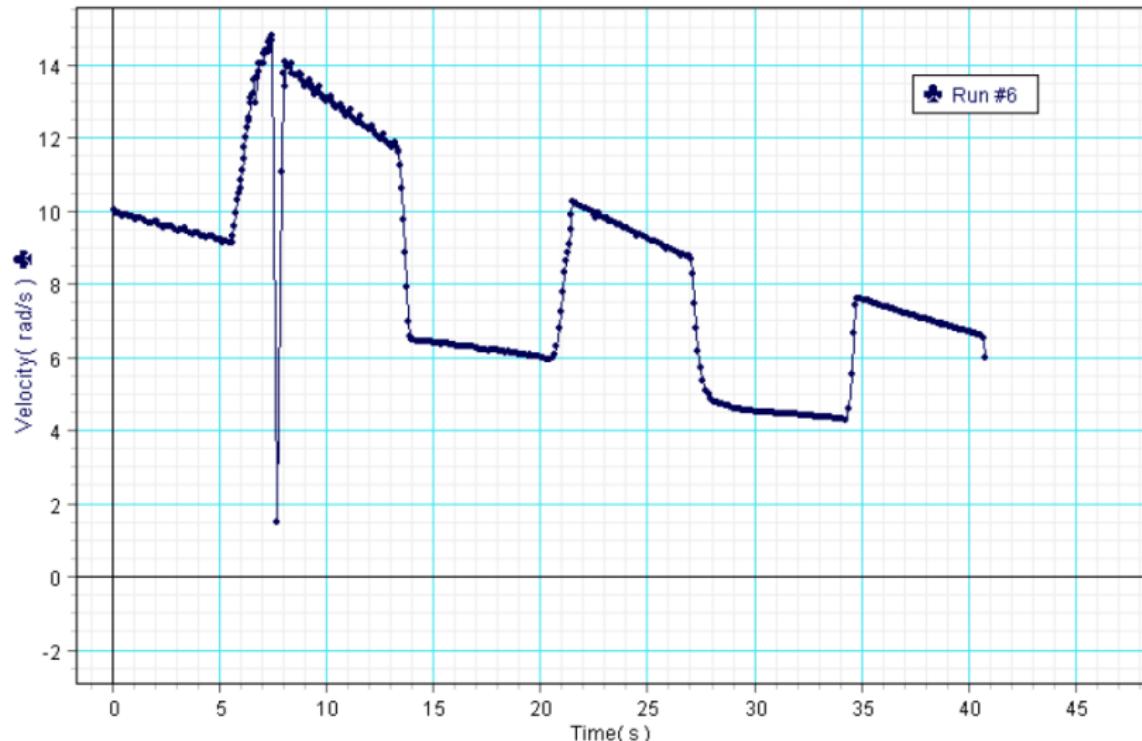


Graf č. 2: Kalibračná krivka miliampérmetra meraného napätia I_x v závislosti na odchýlke δ_I .



Graf č. 3: Kalibračná krivka odporovej dekády R_{x0} v závislosti na odchýlke δ_R .

Špatné příklady

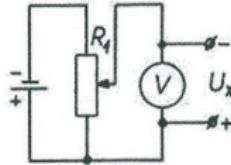


Obrázek 3: K ZZMH: závislost úhlové rychlosti rotace disku na čase.

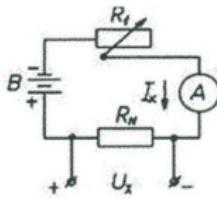
Obrázky a schemata

Obdobná pravidla jako pro grafy. Obzvláště:

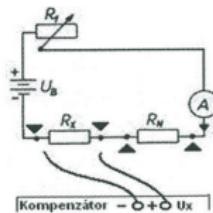
- ▶ Dostatečná velikost
- ▶ Pokud je obrázek okopírovaný(obkreslený), pak je nutné uvést zdroj odkazem [číslo] do soupisu literatury.



Obr. 6: Ciachovanie
voltmetra [2]



Obr. 5: Ciachovanie
ampérmetra [2]



Obr. 4: Ciachovanie
odporovej dekády [2]

vôhn obrad!!

Linearizace závislostí

Pro větší přehlednost je lepší zobrazovat lineární závislosti. Lze pak snadno opticky zkontolovat.

Příklady:

1. měření závislosti T periody kyvadla na jeho délce L :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}, \quad \text{lepší je zobrazovat } T^2 = 4\pi^2 \frac{L}{g}$$

2. závislost indexu lomu n na vlnové délce světla λ :

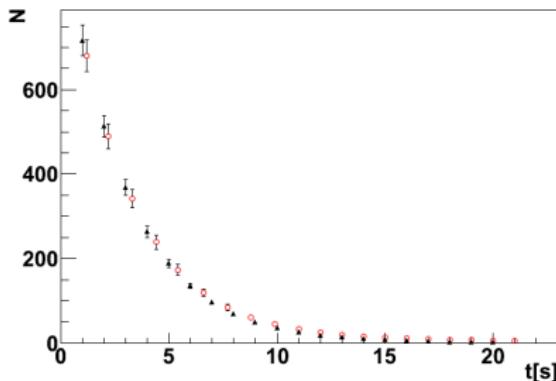
$$n = A + \frac{B}{\lambda^2}, \quad \text{lepší je zobrazovat } n \text{ jako funkci } \frac{1}{\lambda^2}$$

Linearizace závislostí

Často je měřená závislost exponenciální (např. radioaktivní rozpad)

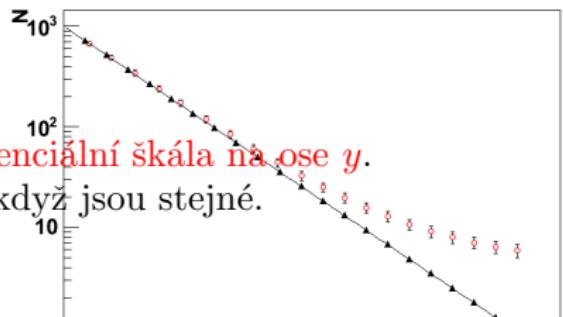
$$N = N_0 e^{-t/\lambda}$$

linearizace pomocí logaritmu: $\log_{10} N = \log_{10} N_0 - \frac{t}{\lambda} \log_{10} e$



- ▶ Špatně rozlišitelná část grafu s malými hodnotami N .
- ▶ Jsou skutečně obě závislosti exponenciální?

Stejná data v obou případech, **exponenciální škála na ose y .**
Pozor - chyby také vypadají jinak, i když jsou stejné.



Takhle to pak vypadá "doopravdy" :

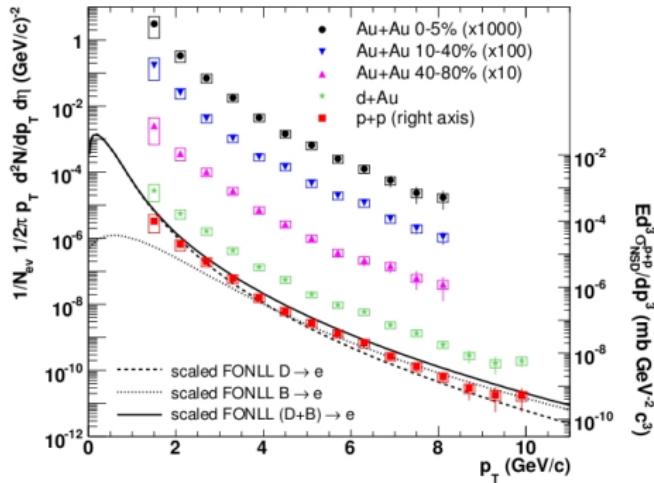


FIG. 2: Non-photonic electron spectra. Vertical bars are statistical errors, boxes are systematic uncertainties. The curves are scaled pQCD predictions for $p+p$ [7]. Cross section on right axis applies to $p+p$ spectrum only.

Zpracování výsledků měření početními metodami

Velmi často měříme závislost jedné veličiny na druhé.

Měření - soubor hodnot $\{y_i, x_i\}$ a příslušných chyb.

Pokud je $x_{i+1} - x_i = \text{konstanta}$, pak je měření *ekvidistantní*.

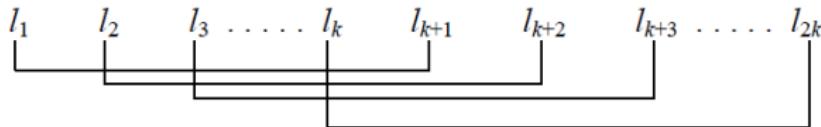
Hledáme vyjádření závislosti $y = f(x)$.

Cíle zpracování dat:

- ▶ Optimální využití naměřených dat (metoda postupných měření),
- ▶ Určování závislosti veličin
 - Grafické vyrovnání
 - Skupinová metoda
 - Metody početní interpolace (lineární interpolace, Newtonův vzorec).

Metoda postupných měření

Příklad: modul pružnosti v tahu - měření prodloužení Δl vzorku
 $\frac{\Delta l}{l_0} = \frac{1}{E'} \frac{F}{S}$, l_0 -původní délka, S -průřez, F -síla.



$$\overline{\Delta l} = \frac{1}{n-1} [(l_2 - l_1) + (l_3 - l_2) + \dots + (l_n - l_{n-1})] = \frac{l_n - l_1}{n-1}$$

pro vyšší přesnost lze použít

$$\overline{\Delta l} = \frac{1}{k} \left[\frac{l_{k+1} - l_1}{k} + \frac{l_{k+2} - l_2}{k} + \dots + \frac{l_n - l_k}{k} \right] = \frac{1}{k^2} \left(\sum_{i=1}^n l_i - 2 \sum_{i=1}^k l_i \right)$$

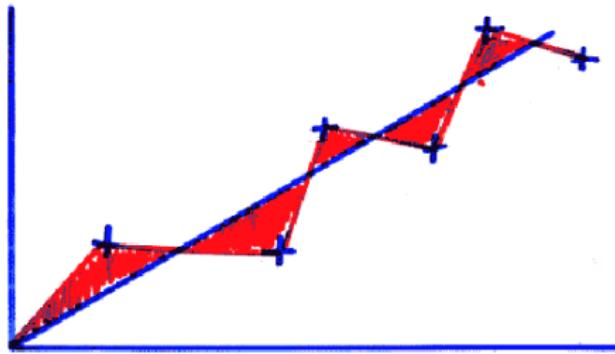
Rozptyl měřených hodnot se vypočte z rozptylu průměru $\overline{\Delta l}$ dělením číslem k , tj. platí

$$\sigma_{\Delta l}^2 = \frac{1}{k^2} [(l_{k+1} - l_1)^2 + (l_{k+2} - l_2)^2 + \dots + (l_n - l_k)^2] - \frac{\overline{\Delta l}}{k}$$

Grafické vyrovnání

Proložení závislosti $y(x) = A + Bx$ daty.

Metoda "podle oka"



$$\sum \text{ploch} = \phi$$

Přibližně polovina bodů by měla ležet nad a polovina pod přímkou.

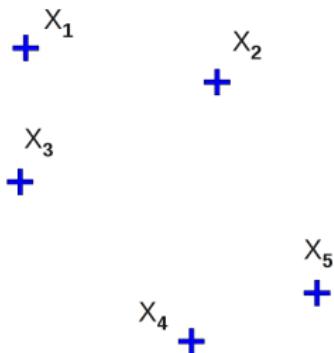
$$B = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Skupinová metoda

Pro proložení $y(x) = A + Bx$ potřebuji dva body \Rightarrow Rozdělím data do dvou skupin.

Postupně graficky vytvářím těžiště.

Pokud je závislost pouze $y(x) = Bx$, stačí pouze jedna skupina, další bod je $[0, 0]$.

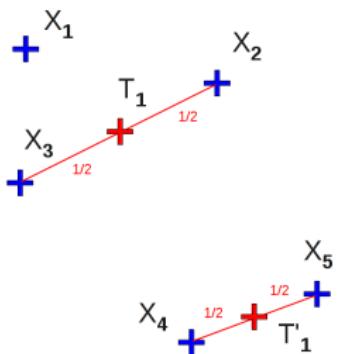


Skupinová metoda

Pro proložení $y(x) = A + Bx$ potřebuji dva body \Rightarrow Rozdělím data do dvou skupin.

Postupně graficky vytvářím těžiště.

Pokud je závislost pouze $y(x) = Bx$, stačí pouze jedna skupina, další bod je $[0, 0]$.

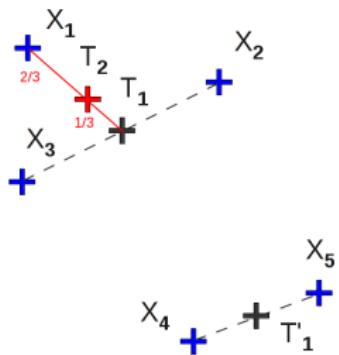


Skupinová metoda

Pro proložení $y(x) = A + Bx$ potřebuji dva body \Rightarrow Rozdělím data do dvou skupin.

Postupně graficky vytvářím těžiště.

Pokud je závislost pouze $y(x) = Bx$, stačí pouze jedna skupina, další bod je $[0, 0]$.

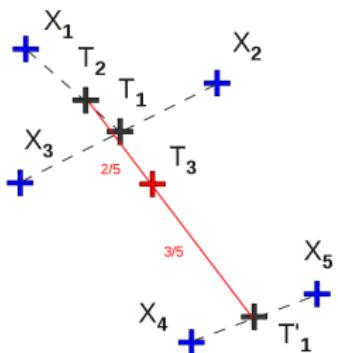


Skupinová metoda

Pro proložení $y(x) = A + Bx$ potřebuji dva body \Rightarrow Rozdělím data do dvou skupin.

Postupně graficky vytvářím těžiště.

Pokud je závislost pouze $y(x) = Bx$, stačí pouze jedna skupina, další bod je $[0, 0]$.



Metoda nejmenších čtverců

Neznámější vyrovnávací(fitovací) metoda.

$y_1 \pm \sigma_1, y_2 \pm \sigma_2, \dots, y_n \pm \sigma_n$ - experimentální hodnoty získané v bodech x_1, x_2, \dots, x_n

p_1, p_2, \dots, p_k - neznámé parametry funkce $y = f(x, p_1, \dots, p_k)$.

Proložení křivky $y = f(x, p_1, \dots, p_k)$ daty \iff nalezení parametrů p_1, p_2, \dots, p_k tak, aby křivka co nejlépe přiléhala k naměřeným bodům $[x_i, y_i]$.

Potřebuji kriterium kvality vyrovnání.

Metoda nejmenších čtverců

Odchylky:

$$\epsilon_i = y_i - y(x_i, p_1, \dots, p_k)$$

Podmínka:

$$\begin{aligned}\chi^2 &= \sum_i \frac{\epsilon_i^2}{\sigma_i^2} = \text{min.} && \text{- residuální součet čtverců} \\ \implies \frac{\partial \chi^2}{\partial p_i} &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, k.\end{aligned}$$

Nejčastější regresní funkce:

$$y = a + bx$$

lineární regrese

$$y = a + bx + cx^2$$

kvadratická regrese

$$y = p_0 + p_1x + \dots + p_rx^r$$

polynomiální regrese

$$y = a + \frac{b}{x}$$

hyperbolická regrese

$$y = ae^{bx}$$

exponenciální regrese

Lineární regrese

Metoda nejmenších čtverců pro regresní funkci $y = a + bx$.

$$\chi^2 = \sum_i \frac{(y_i - a - bx_i)^2}{\sigma_i^2}$$

Podmínka minimalizace při $\sigma_i \approx \sigma_j = \sigma$:

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial a} = \frac{-2}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (y_i - a - bx_i) = 0.$$

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial b} = \frac{-2}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n x_i(y_i - a - bx_i) = 0.$$

z toho plyne:

$$an + b \sum x_i = \sum y_i$$

$$a \sum x_i + b \sum x_i^2 = \sum x_i y_i$$

Lineární regrese

Výsledné parametry:

$$a = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$
$$b = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

Výsledné chyby parametrů:

$$\sigma_a = \sigma_y \sqrt{\frac{\sum x_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}},$$

$$\sigma_b = \sigma_y \sqrt{\frac{n}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}},$$

kde $\sigma_y = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - a - b x_i)^2}$

Nelineární regrese

Nelineární regresní funkce - není lineární v parametrech p_i .

Příklad:

$$y = \frac{1}{a + b\varphi(x)} \rightarrow z = \frac{1}{y} \Rightarrow z = a + b\varphi(x)$$

$$y = ce^{b\varphi(x)} \rightarrow z = \ln y \Rightarrow z = a + b\varphi(x); a = \ln c$$

Kvalita fitu

K vyjádření kvality výsledného vyrovnání se často používá χ^2 test:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - a - bx_i)^2}{\sigma_i^2}$$

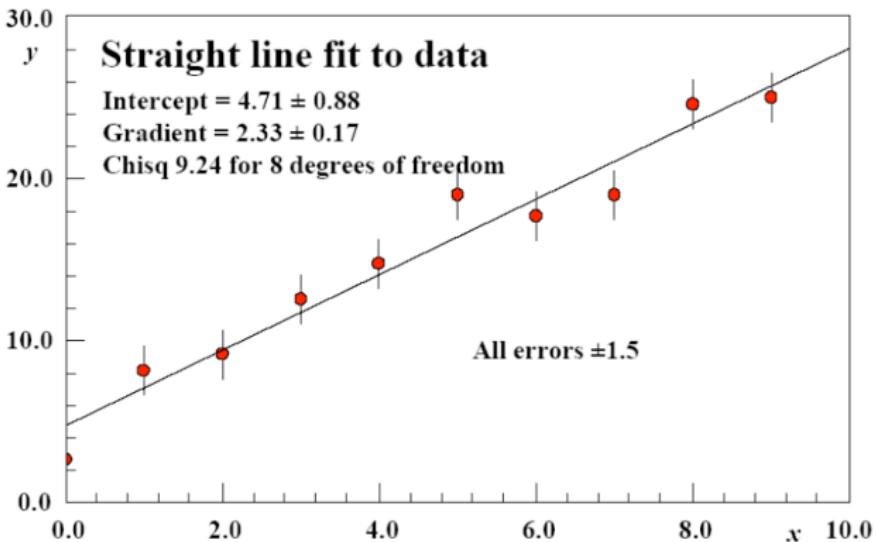
Pro dobrý fit by mělo být $\chi^2 \approx n - k$, tj. $\chi^2/(n - k) \approx 1$, kde $n - k = \text{počet měření} - \text{počet parametrů} \dots$ počet stupňů volnosti.

Pokud je $\chi^2/(n - k) > 1$, pak proložená závislost nevystihuje změřená data.

Pokud je $\chi^2/(n - k) < 1$, pak jsme zvolili funkci s příliš mnoha parametry.

Přesnost proložení neodpovídá chybám měření.

Kvalita fitu



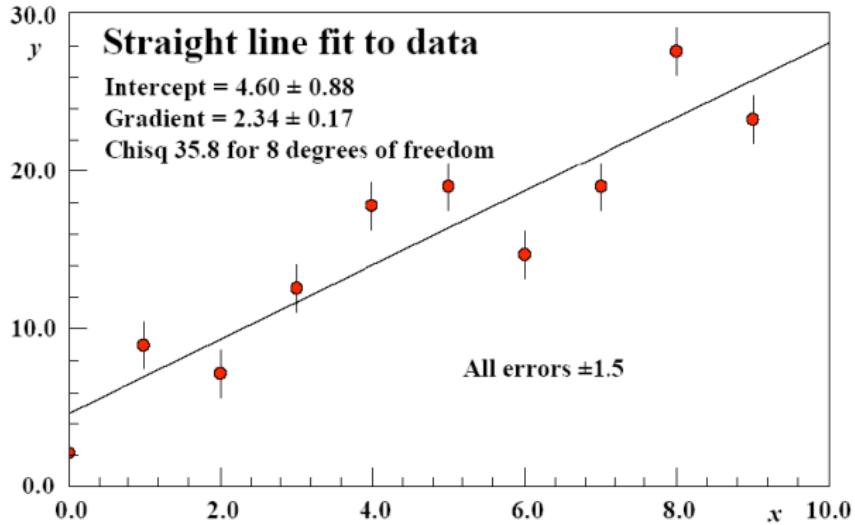
This is the data plotted with PhysPlot

Could fit using a polynomial e.g. quadratic with 3 parameters, or cubic with 4 params

So, we "penalise" the χ^2 , use no. degrees of freedom (n.d.f.) = n - #params

It tells us the $\chi^2 = 9.24$ for 8 degrees of freedom (10 data - 2 params = 8 d.f.)

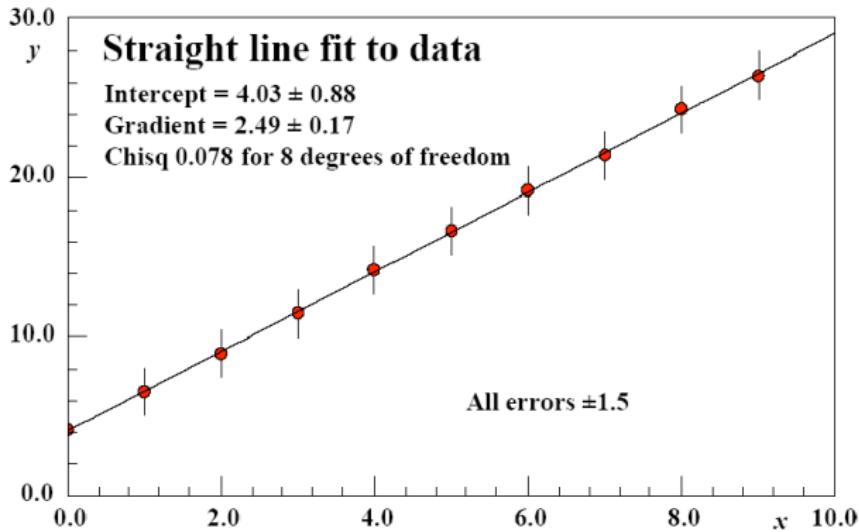
Thus $\chi^2/n.d.f. = 1.16$ not bad!



In this example the data scatter more:
similar straight line fit
look at $\chi^2/n.d.f. = 35.8 / 8 = 4.48$

This means that either the model is wrong (i.e. straight line) or errors too small

Kvalita fitu



In this example the data scatter much less:

similar straight line fit

look at $\chi^2/n.d.f. = 0.078 / 8 = 0.0098$

when $\chi^2/n.d.f.$ is too small, probably means errors are underestimated

Další metody regrese:

- minimalizace absolutní odchylky
- maximum likelihood(Bayesovské metody)
- metoda momentů

Nejčastěji používané programy:

- MINUIT, ROOT, PAWm
- GNUplot
- lze částečně i v Excelu

Interpolace vs. extrapolace

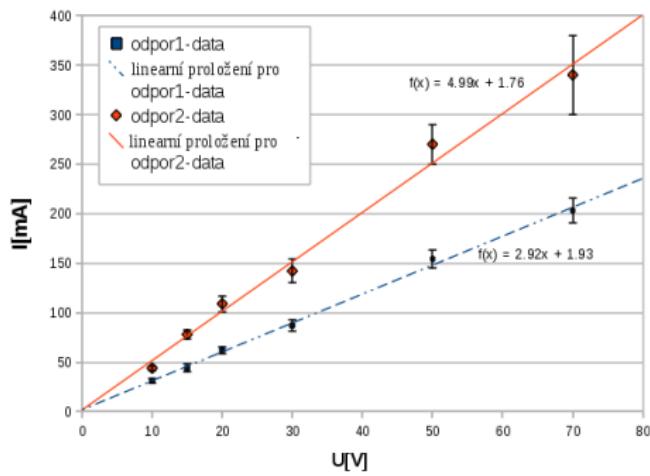
Interpolace - určení křivky mezi měřenými body

Extrapolace - předpověď pro oblast mimo prováděné měření

Zpracování výsledků měření početními metodami

Měříme závislost jedné veličiny na druhé.

- ▶ Měření - soubor hodnot $\{y_i, x_i\}$ a příslušných chyb.
- ▶ Hledáme vyjádření závislosti $y = f(x; p_1, \dots, p_n)$.
- ▶ Chceme určit hodnoty parametrů závislosti p_1, \dots, p_n a to **včetně chyb** $\sigma_{p_1}, \dots, \sigma_{p_n}$.



Obr.1: Změřená závislost proudu na přiloženém napětí pro dvě hodnoty odporu.

Metoda nejmenších čtverců

Neznámější vyrovnávací(fitovací) metoda.

Proložení křivky $y = f(x, p_1, \dots, p_k)$ daty \iff nalezení parametrů p_1, p_2, \dots, p_k tak, aby křivka co nejlépe přiléhala k naměřeným bodům $[x_i, y_i]$.

Potřebuji kriterium kvality vyrovnání.

Metoda nejmenších čtverců

Odchylky:

$$\epsilon_i = y_i - y(x_i, p_1, \dots, p_k)$$

Podmínka:

$$\begin{aligned}\chi^2 &= \sum_i \frac{\epsilon_i^2}{\sigma_i^2} = \text{min.} && \text{- residuální součet čtverců} \\ \implies \frac{\partial \chi^2}{\partial p_i} &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, k.\end{aligned}$$

Nejčastější regresní funkce:

$$y = a + bx$$

lineární regrese

$$y = a + bx + cx^2$$

kvadratická regrese

$$y = p_0 + p_1x + \dots + p_rx^r$$

polynomiální regrese

$$y = a + \frac{b}{x}$$

hyperbolická regrese

$$y = ae^{bx}$$

exponenciální regrese

Lineární regrese

Metoda nejmenších čtverců pro regresní funkci $y = a + bx$.

$$\chi^2 = \sum_i \frac{(y_i - a - bx_i)^2}{\sigma_i^2}$$

Nejjednodušší případ. V tomto případě lze dojít k exaktnímu řešení:

$$a = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \quad \sigma_a = \sigma_y \sqrt{\frac{\sum x_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}}$$

$$b = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \quad \sigma_b = \sigma_y \sqrt{\frac{n}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}}$$

$$\text{kde } \sigma_y = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - a - bx_i)^2}.$$

Nelineární regrese

V ostatních případech je řešení složitější.

- ▶ Linearizace:

- ▶ Převedení dat do nových proměnných, v kterých očekáváme lineární tvar závislosti. POZOR: Je nutné přepočítat i chyby.
- ▶ Nafitování lineární závislosti - získání parametrů včetně chyb.
- ▶ Převod zpět do původních proměnných a to včetně chyb.
- ▶ Příklad:

$$y = \frac{1}{a + b\varphi(x)} \rightarrow z = \frac{1}{y} \Rightarrow z = a + b\varphi(x)$$

$$y = ce^{b\varphi(x)} \rightarrow z = \ln y \Rightarrow z = a + b\varphi(x); a = \ln c$$

- ▶ Numerické řešení

- ▶ Excel:

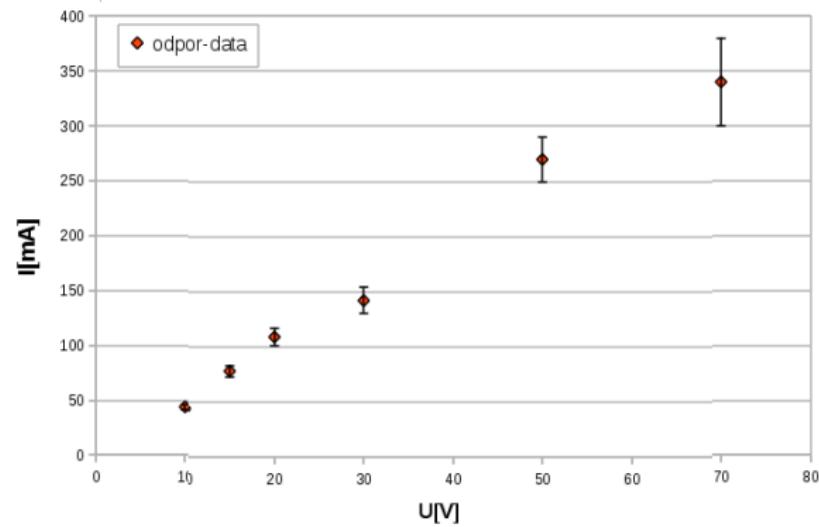
- automatické fitování jednoduchých funkcí, nebo použití minimalizéru
 - nutné spočítat chyby "manuálně".

- ▶ Speciální software - GNUMplot, ROOT, ...

Fitování v Excelu (OpenOffice,...)

Hodnoty s chybami do tabulky a do grafu:

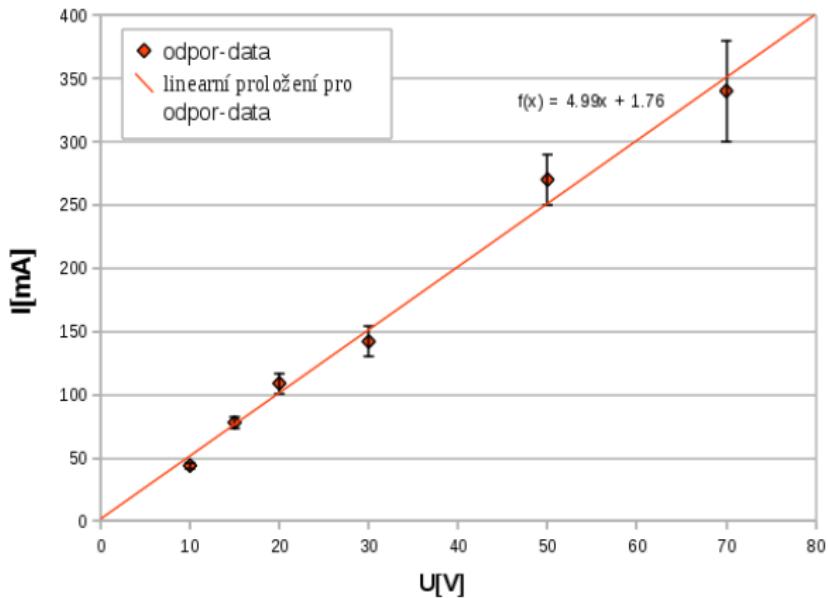
	A	B	C	D
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11	U[V]	I[mA]	I_err[mA]	
12	10	44	2	
13	15	78	5	
14	20	109	8	
15	30	142	12	
16	50	270	20	
17	70	340	40	
18				
19				
20				



Fitování v Excelu (OpenOffice,...)

Určení koeficientů z podle $y = a + b \cdot x$

- Fitem v grafu. Pouze pro měření se stejnými chybami.



Fitování v Excelu (OpenOffice,...)

Určení koeficientů z podle $y = a + b \cdot x$

- pomocí funkce: SLOPE a INTERCEPT. Pouze pro měření se stejnými chybami.

INTERCEPT					
	A	B	C	D	E
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					
11	U[V]	I[mA]	I_err[mA]		
12	10	44	2		
13	15	78	5		
14	20	109	8		
15	30	142	12		
16	50	270	20		
17	70	340	40		
18					
19	a[V]	=INTERCEPT(B12:B17,A12:A17)			
20	b[kOhm]	4.986976744			
21					

Fitování v Excelu (OpenOffice,...)

Určení koeficientů z podle $y = a + b \cdot x$

- pomocí funkce: LINEST. Pouze pro měření se stejnými

	A	B	C	D	E	F
4						
5						
6						
7						
8						
9						
10						
11	U[V]	I[mA]	I_err[mA]			
12	10	44	2			
13	15	78	5			
14	20	109	8			
15	30	142	12			
16	50	270	20			
17	70	340	40			
18						
19	a[V]	1.756589147				
20	b[kOhm]	4.986976744				
21						
22						
23						
24	4.986976744	1.756589147				
25	0.251299417	9.746292964				
26	0.989945063	13.02763907				
27	393.8145183	4				
28	66837.95581	678.8775194				
29						

pole.

[regressionwithlinest.html](#)

$$a = 2 \pm 10$$

$$b = 5.0 \pm 0.3$$

Fitování v Excelu (OpenOffice)

A24	f(x) Σ = [=LINEST(B12:B17,A12:A17,1,1)]		
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11	U[V]	I[mA]	I_err[mA]
12	10	44	2
13	15	78	5
14	20	109	8
15	30	142	12
16	50	270	20
17	70	340	40
18			
19	a[V]	1.756589147	
20	b[kOhm]	4.986976744	
21			
22			
23			
24	4.986976744	1.756589147	
25	0.251299417	9.746292964	
26	0.989945063	13.02763907	
27	393.8145183	4	
28	66837.95581	678.8775194	
...			

ouze pro měření

POZOR:

SLOPE(), INTERCEP(), LINEST() neberou v úvahu chyby změřených bodů.

Fitování v Excelu (OpenOffice,...)

Jak to udělat naprosto správně?

... naprosto manuálně.

Postup:

- ▶ Spočítat hodnoty čtverců odchylek vážených chybami.
- ▶ Minimalizovat pomocí minimalizéru v Excelu.
- ▶ Dopočítat chyby.

Zní to složitě a pracně ...

... a je to složité a pracné.

... ale může se to hodit.

Fitování v Excelu (OpenOffice,...)

Zavedeme políčka pro parametry “ a “, “ b “ a a spočítáme:

$$\chi^2 = \sum_i \frac{\epsilon_i^2}{\sigma_i^2}, \text{ kde } \epsilon_i = y_i - y(x_i, p_1, \dots, p_k)$$

V našem případě lineárního fitu:

$$\chi^2 = \sum_i \frac{(y_i - a - bx_i)^2}{\sigma_i^2}$$

Je dobré zvolit rozumné počáteční hodnoty do políček pro parametry. (Zde se hodí primitivní ”fitování podle oka“)

Fitování v Excelu (OpenOffice,...)

Výpočet χ^2 :

	A	B	C	D	E	F	G
4							
5							
6							
7							
8							
9							
10							
11	U[V]	I[mA]	I_err[mA]	y=a+bx			
12	10	44	2		11	272.25	
13	15	78	5		16	153.76	
14	20	109	8		21	121	
15	30	142	12		31	85.5625	
16	50	270	20		51	119.9025	
17	70	340	40		71	45.225625	
18							
19	a[V] =	1			Sum chi2=	=SUM(F12:F17)	
20	b[kOhm]=	1					
21							
22							

Fitování v Excelu (OpenOffice,...)

Minimalizace χ^2 pomocí “Tools→Solver“: (Open Office potřebuje NLPsolver plugin)

The screenshot shows the OpenOffice Calc interface with the Solver dialog box open. The Solver dialog has the following settings:

- Target cell:** \$F\$19
- Optimize result to:** Minimum (radio button selected)
- By changing cells:** \$B\$19:\$B\$20
- Limiting conditions:** Four rows of constraints are listed, each with an operator of " \leq ". The "Value" column contains ranges from \$B\$19:\$B\$20 to \$B\$22:\$B\$25.

The spreadsheet area shows the following data:

	A	B
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11	U[V]	I[m]
12	10	
13	15	
14	20	
15	30	
16	50	
17	70	
19	a[V] =	1
20	b[kOhm]=	1
	Sum chi2=	797.700625
21		
22		

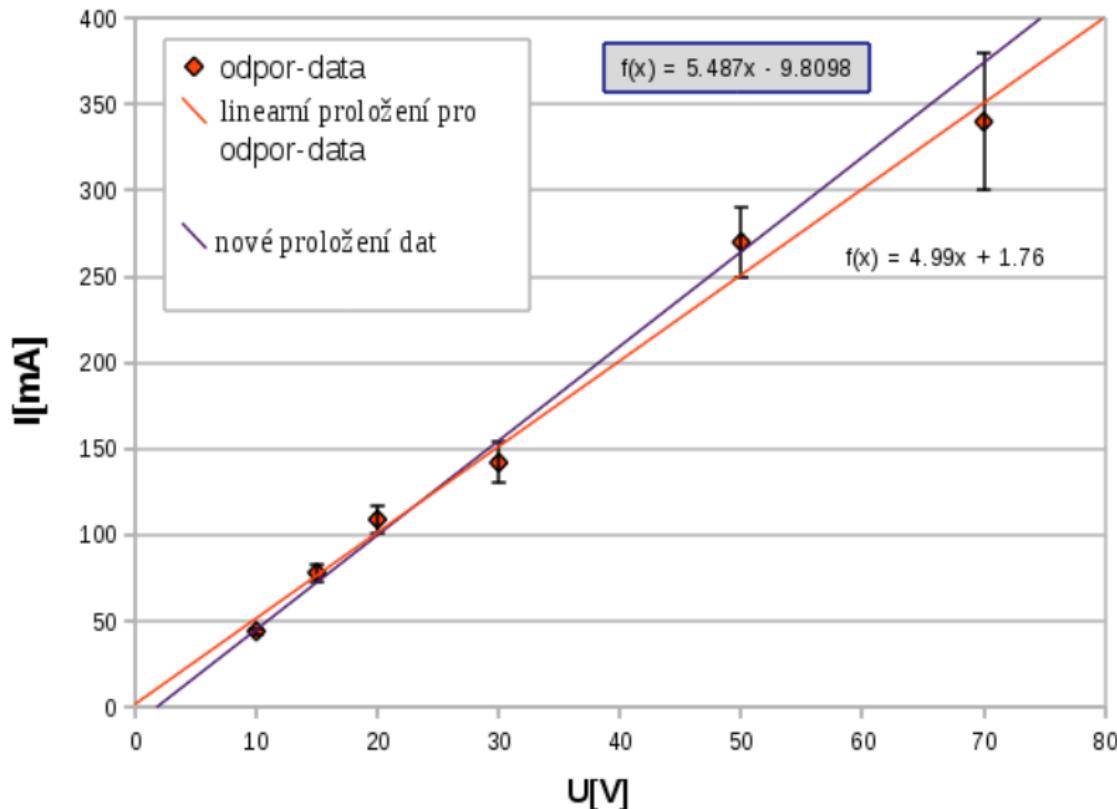
Fitování v Excelu (OpenOffice,...)

Minimalizace - výsledek:

	A	B	C	D	E	F	
4							
5							
6							
7							
8							
9							
10							
11	U[V]	I[mA]	I_err[mA]		y=a+bx	[(I-y)/err]^2	
12	10	44	2		45.06067218	0.281256368	
13	15	78	5		72.4959043	1.21180278	
14	20	109	8		99.93113641	1.28506698	
15	30	142	12		154.8016007	1.138062356	
16	50	270	20		264.5425291	0.074459971	
17	70	340	40		374.2834576	0.734597165	
18							
19	a[V] = -9.809792056				Sum chi2=	4.72524562	
20	b[kOhm]= 5.487046424						
21							
22							

Fitování v Excelu (OpenOffice,...)

Srovnání (modrý fit bere v potaz chyby dat):



Fitování v Excelu (OpenOffice, ...)

Nyní zbývá spočítat σ_a, σ_b podle:

$$\sigma_a = \sigma_y \sqrt{\frac{\sum x_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}}$$

$$\sigma_b = \sigma_y \sqrt{\frac{n}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}}$$

kde $\sigma_y = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - a - bx_i)^2}$.

Fitování v Excelu (OpenOffice,...)

Kompletní výsledek:

8						
9						
10						
11	U[V]	I[mA]	I_err[mA]	y=a+bx	$[(I-y)/err]^2$	
12	10	44	2	45.06067218	0.281256368	
13	15	78	5	72.4959043	1.21180278	
14	20	109	8	99.93113641	1.28506698	
15	30	142	12	154.8016007	1.138062356	
16	50	270	20	264.5425291	0.074459971	
17	70	340	40	374.2834576	0.734597165	
18						
19	a[V] = -9.809792056			Sum chi2=	4.72524562	
20	b[kOhm]= 5.487046424					
21						
22						
23	err a	1.893681173				
24	err b	0.332173652				
25						

Srovnání výsledků lineární regrese v Excelu

Automatický fit Excelu

- nebere v potaz chyby dat

”Manuální” fit Excelu

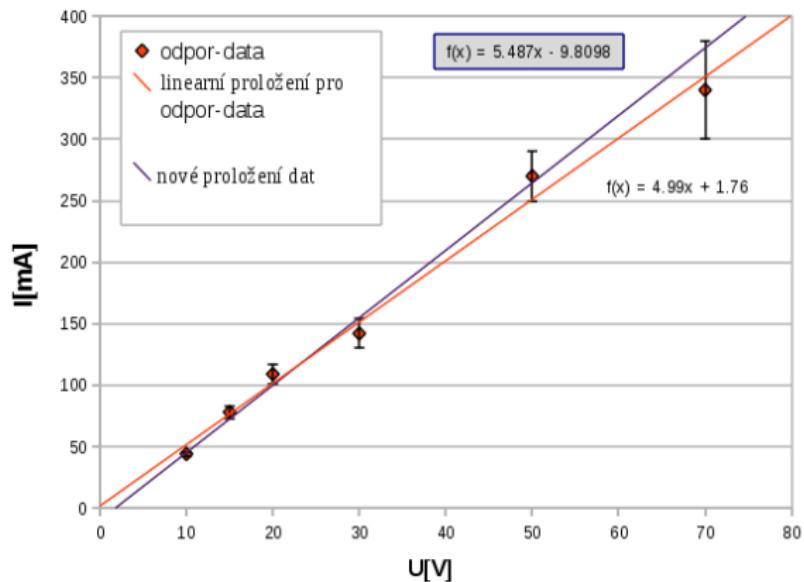
- používají se chyby dat

$$a = 2 \pm 10$$

$$b = 5.0 \pm 0.3$$

$$a = -10 \pm 2$$

$$b = 5.5 \pm 0.3$$



- ▶ Použitelné v případě:
 - Jednoduchá fitovací funkce.
 - Pokud mě nezajímají chyby (např. kalibrační křivky)
 - Data mají stejné nebo žádné (rozuměj zanedbatelné) chyby.
 - Případě nouze, ...
- ▶ Nevýhoda: Pracné, zdlouhavé
 - Linearizace
 - Hodně příležitostí k chybám
- ▶ “Zábava” na celé odpoledne.

Jak zvládnout to samé v pěti minutách? ...

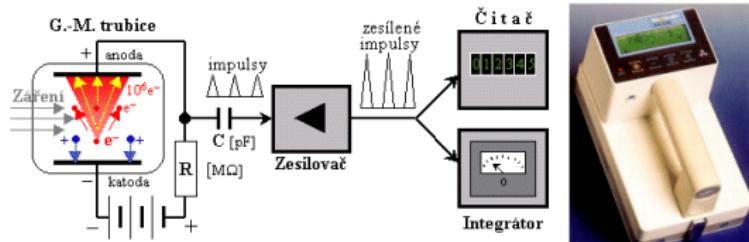
Měření četnosti (Poissonovo rozdělení)



Měření četnosti (Poissonovo rozdělení)

Motivace: měření aktivity zdroje

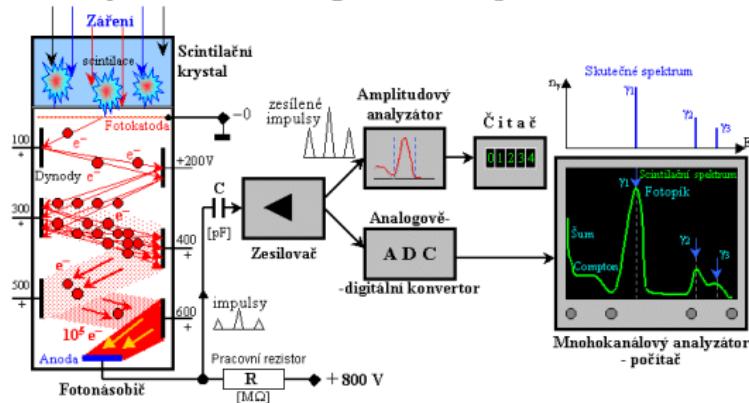
Geiger-Müllerův čítac:



$$\text{aktivita: } 1 \text{ Bq} = 1 \text{ částice} / 1 \text{ s} = s^{-1}$$

Jaká je přesnost měření?

Složitější:měření energetického spektra zářiče



Experiment s mincí

Chceme experimentálně ověřit, že pravděpodobnost padnutí panny je $p = 0.5$

Výsledky experimentu:

počet hodů $N = 7$

panny $x = 4$

orli $y = 3$

Odhad $p = \frac{x}{N} = 0.57$

Je to konsistentní s $p = 0.5$?

Potřebuji znát chybu měření σ_p

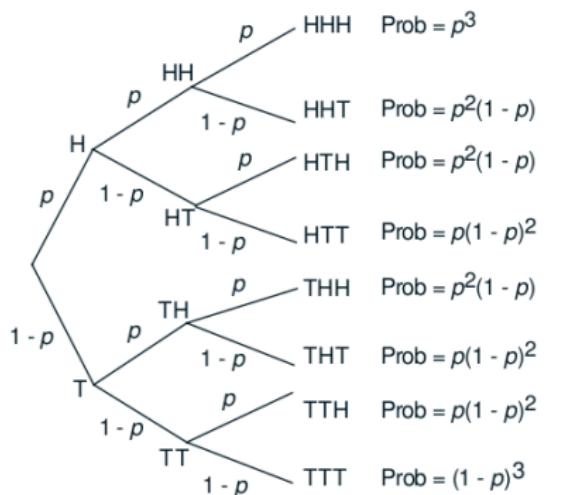
Ta bude očividně klesat s počtem měření N.

Binomické rozdělení

N pokusů s dvěma možnými výsledky (Head, Tail).

Binomické rozdělení $P(n; N, p)$ - pravděpodobnost právě k výsledků jednoho typu (Head) z N pokusů při pravděpodobnosti p při každém pokusu:

$$P(k; N, p) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{(N-k)} = \frac{N!}{k!(N-k)!} p^k (1-p)^{(N-k)}$$



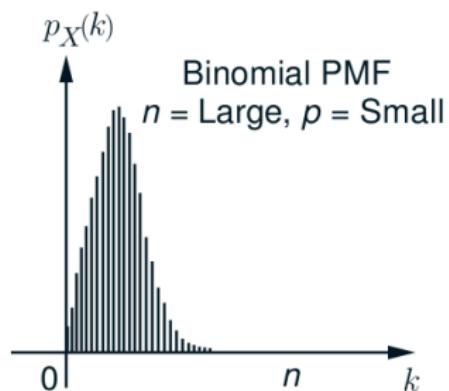
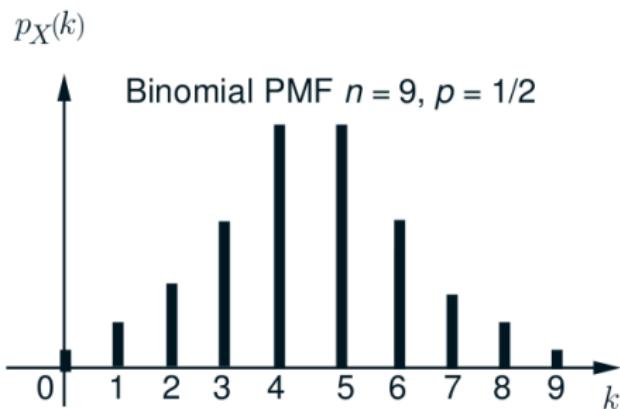
$$\bar{k} = Np$$

$$\frac{\bar{k}}{N} \longrightarrow p$$

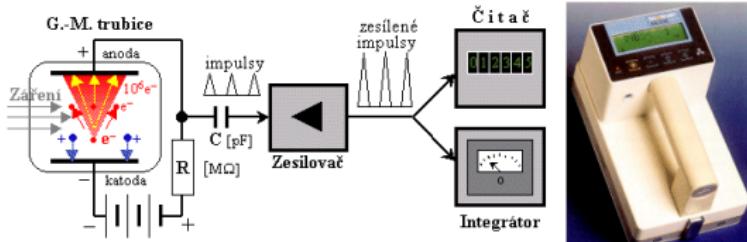
Binomické rozdělení

Diskrétní rozdělení pro $k \geq 0$.

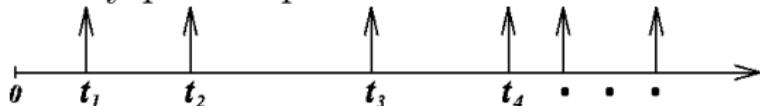
$$f(k; N, p) = B(N, p) = \begin{cases} \binom{N}{k} p^k (1-p)^{(N-k)}, & k = 0, 1, \dots, N \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$



Geiger-Müllerův čítac:



časový průběh pulsů:



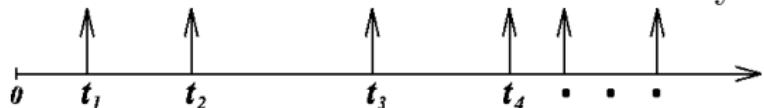
Čas mohu “rozdělit” na N stejných časových úseků tak, aby v každém úseku byla max. jedna událost.

⇒ Celkový počet událostí za celkový čas je popsán binomickým rozdělením.

Jak velké N je dostatečně velké?....

Poissonovská approximace

Rozdělme t na nekonečně malé intervaly...



Pro $N \rightarrow \infty$ a $p \rightarrow 0$ tak, že $Np \rightarrow \lambda$, lze binomické rozdělení s parametry N, p approximovat Poissonovým rozdělením

$$P(X = x) = \binom{N}{x} p^x \cdot q^{N-x} \rightarrow e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^x}{x!}, \quad N \rightarrow \infty$$

Poissonovo rozdělení

$$f_X(x, \lambda) = \begin{cases} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^x}{x!}, & x = 0, 1, \dots \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

$$\bar{x} = \sigma_x^2 = \lambda$$

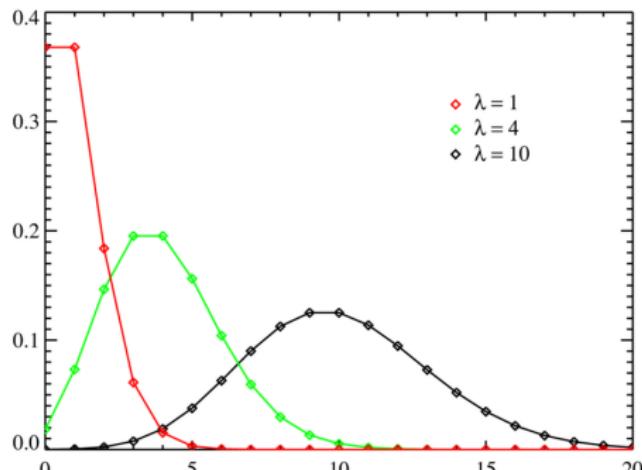
Pokud tedy změřím za daný čas
N událostí výsledek měření je

$$x = (N \pm \sqrt{N})$$

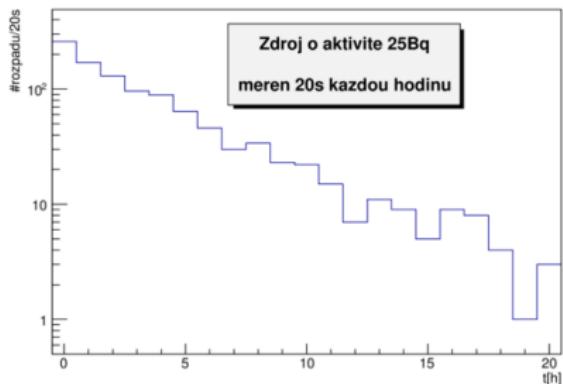
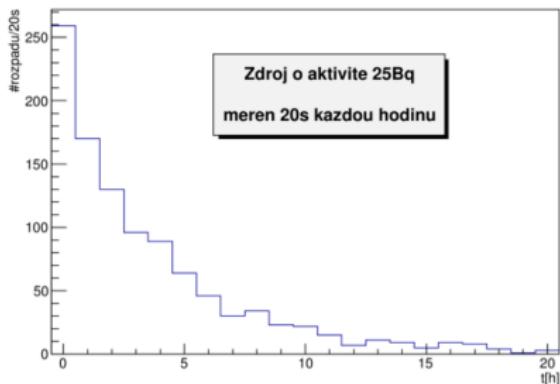
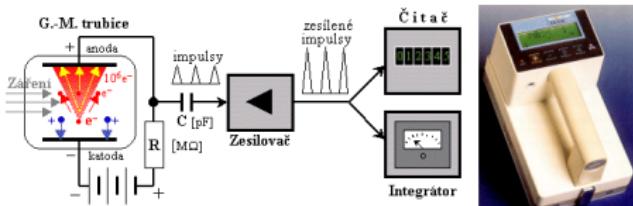
tedy relativní chyba měření

$$\delta = \frac{\bar{x}}{\sigma_x} = \frac{N}{\sqrt{N}} = \frac{1}{\sqrt{N}}$$

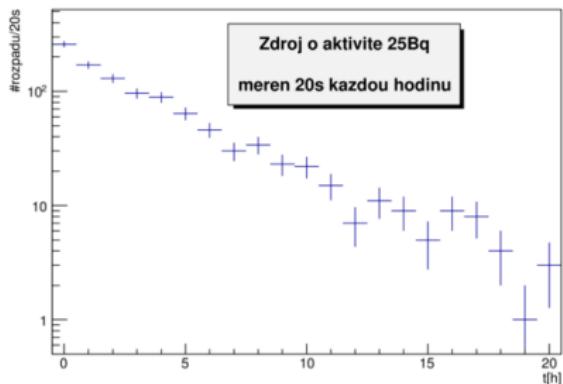
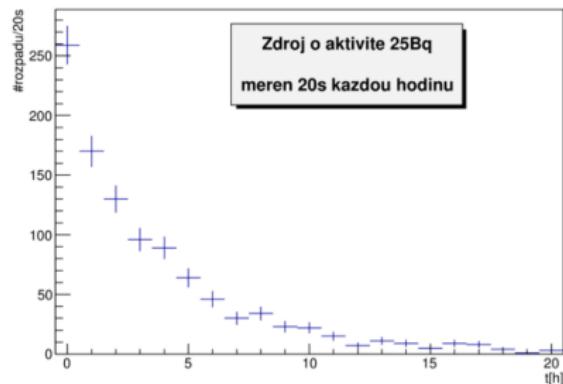
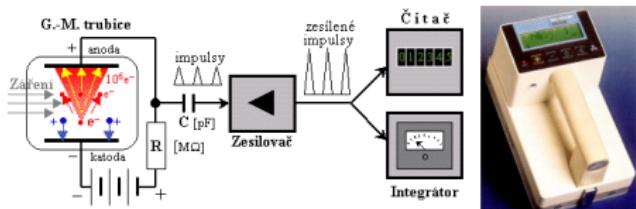
Pro větší λ (tj. N) se blíží Gaussovou rozdělení .



Měření aktivity zdroje



Měření aktivity zdroje



Chyby měření-připomenutí

Každá vynesená hodnota je změřena s jistou nepřesností – chybou.

Zdroj chyb (neuvážujeme systematické chyby):

- ▶ Chyba měřicí přístroje
 - Lze zanedbat pokud je přesnost přístroj podstatně vyšší než přesnost měření.
 - Pozor na rozdíl mezi absolutní a relativní chybou přístroje.
 - Kombinuje se se statistickou chybou:
$$\sigma_{celkova}^2 = \sigma_{stat}^2 + \sigma_{pristroje}^2.$$
- ▶ Opakovaná měření - výpočet pomocí aritmetického průměru a chyby aritmetického průměru.
- ▶ Měření počtu nezávislých událostí
 - např. počet pozorovaných rozpadů jader za určitý časový interval.
 - Řídí se Poissonovým rozdělením: $\sim \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$, kde n je počet pozorovaných událostí.
 - Chyba měření je: $\sigma = \sqrt{n}$.

Systematické chyby

chyby měření

- ▶ statistické
 - náhodné fluktuace
 - mnoho nezávislých zdrojů
 - sčítání v “kvadrátech”
 - klesají s množstvím dat
- ▶ **systematické (bias)**
 - systematická změna měřené veličiny
 - ovlivňuje všechna měření ve stejném “směru”
 - nezávislé na množství dat

Chyba měřicího přístroje

- ▶ Relativní chyba

měřicí přístroj ukazuje systematicky o určité procento více či méně, než je reálná hodnota.

Například:

špatně zkalibrovaný teploměr
vytahané měřicí pásmo.

- ▶ Absolutní chyba

Konstantní příspěvek ke všem měřeným hodnotám

Nejčastěji špatně nastavený nulový bod

Například

nevynulování prázdných vah - korekce na váhu misek.

Lze odstranit rekalibrací přístroje.

Zdroje systematických chyb

Vliv experimentátora

Opaková nepřesnost při provádění měření

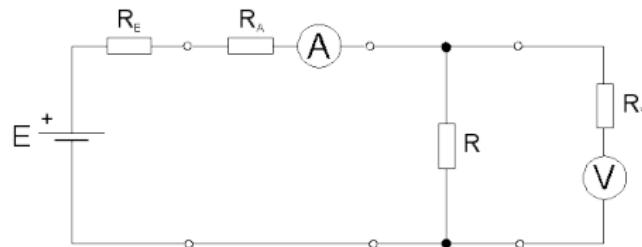
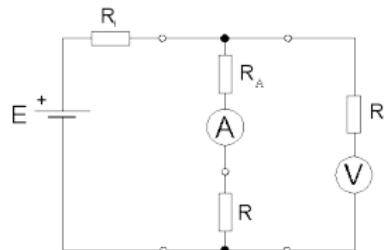
- ▶ Vyložená nepřesnost
 - Např. Systematicky špatné odečítání
 - Lze zjistit přeměřením
 - Lze odstranit
- ▶ Nevyhnutelné chyby
 - Např. reakční doba
 - Lze odhadnout předem
 - Může se vyrušit
 - Lze odstranit např. nahrazením člověka elektronikou
- ▶ Antropický princip

Zdroje systematických chyb

Interakce měřicího přístroje s měřeným systémem

Příklad:

- ▶ Teploměr odebírá z lázně teplo a ochlazuje měřené těleso.
- ▶ Měření proudu/napětí - nesplnění podmínek ideálního ampér/voltmetru.



Přítomno vždy – nelze pozorovat a neovlivnit.

Sledování a kompenzace je velmi obtížné a často i nemožné.

Zdroje systematických chyb

Chyby vyplývající z neúplné znalosti oprav a modelů.

Nepřímá měření

- často komplikované závislosti bez explicitního vzorce.
- modelově závislé
- nepřesná znalost parametrů

Opravy systematických chyb

- často podle modelů a simulací
- ne vždy úplně dokonalé

Víme, že se dopouštíme chyby, ale nevíme jakým směrem. Často jsme pouze schopni jen odhadnout její velikost.

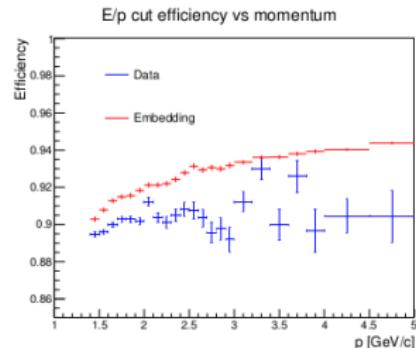


Figure 4.7: BEMC cut efficiency for two methods of extraction – from data and simulation. The average is used in the calculations of overall reconstruction efficiency.

Zápis systematických chyb

Zapisuje se samostatně od statistické chyby:

$$R = 5.0 \pm 1.2(stat) \pm 0.8(sys) \Omega$$

Nikdy nekombinovat dohromady!

$$R = 5.0 \pm \sqrt{1.2^2(stat) + 0.8^2(sys)} \Omega$$

Zobrazujeme také odděleně.“ Často se zobrazují odděleně systematické chyby z různých zdrojů.

Zobrazení systematických chyb

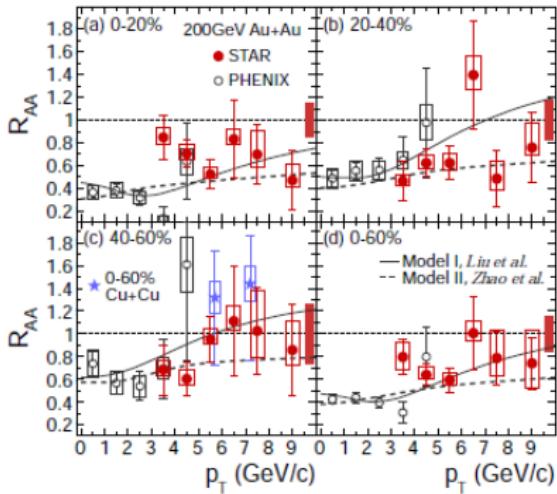


FIG. 3: (Color online.) $J/\psi R_{AA}$ versus p_T for several centrality bins for Au+Au collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV. The statistical (systematic) uncertainties are shown with vertical bars (open boxes). The filled boxes about unity on the right show the size of the normalization uncertainty. PHENIX low- p_T J/ψ results [8] and STAR high- p_T results in Cu+Cu collisions [17] are shown for comparison. The curves are the predictions by Model I (Liu et al.) [13] and Model II (Zhao et al.) [14].

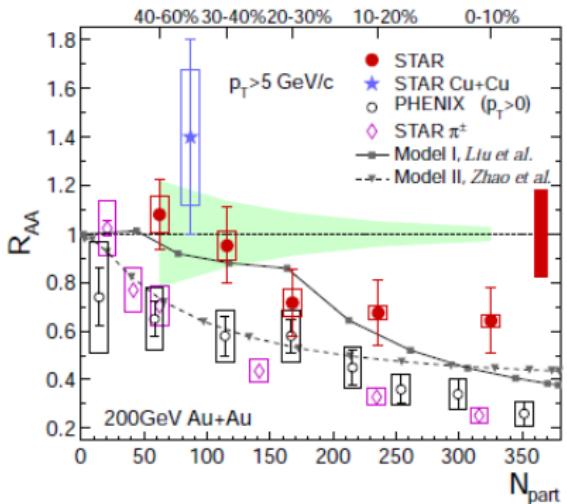


FIG. 4: (Color online) R_{AA} versus N_{part} for high- p_T J/ψ , low- p_T J/ψ from PHENIX [8], and high- p_T π^\pm from STAR [45, 46]. The statistical (systematic) uncertainties are shown in vertical bars (boxes). The shaded green band about unity shows the systematic uncertainties from N_{bin} and the box about unity on the right shows the R_{AA} normalization uncertainty from the statistical and global systematic uncertainties of the $p+p$ reference data.

Jak zjistit systematické chyby

Obecně, velmi těžko....

Většinou se snažíme nějak parametrizovat naši neznalost.

Různé postupy:

- ▶ Samostatně nabraná kalibrační měření.
- ▶ Předběžný odhad přesnosti na základě parametrů měřicího přístroje.
- ▶ Fit z měřených dat.
- ▶ Odhad porovnáním různých modelů
 - ▶ Změření nepřesnosti parametrů modelu.
 - ▶ Teoretický odhad chyb plynoucí z approximací v daném modelu.
 - ▶ Srovnání předpovědí různých modelů.
- ▶ Porovnání s Monte Carlo simulacemi daného procesu.

Systematické chyby

Práce experimentálního fyzika je z 50% starost o systematické chyby

- při přípravě
- během experimentu
- při zpravovaní dat

Neexistují přesná pravidla – zkušenost a zdravý rozum.

Systematické chyby by neměly být naschvál ani zveličovány ani podceňovány.

...tak trochu černá magie.....

Charakteristiky přístrojů

Základní charakteristiky měřicích aparatů

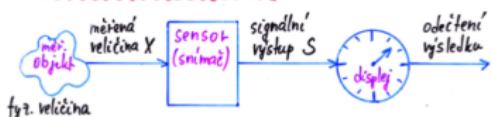
1) měřicí aparatura - transformuje fyz. veličinu do vhodné formy k zaznamenání

napiš: přístroj = skladací metr

měřená fyz. veličina = délka objektu

měření = počet příslušných jednotek (m)

2) model jednoduchého přístroje:



senzor: přeměňuje měřenou veličinu (X) na výstupní signál (S)
(vstupní energie jednoho typu → výst. en. druhého druhu)

fyz. veličina	signál
síla	napětí
délka	proud
teplota	tlak
rychlosť	středlo
tlak	síla
čas	frekvence

pozn.: fyz. veličina a měřená veličina (X) nemusí být stejné

(vážení: fyz. veličina je hmota; X = váha = síla, kterou je těleso přitahováno k zemi = $M \cdot g$)

3) model přístroje se zesilovačem

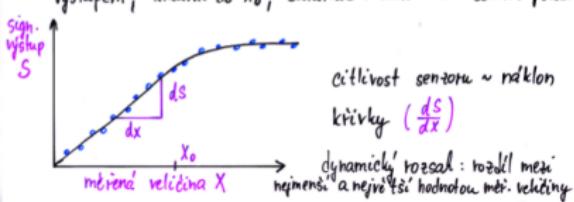


4) pasivní senzor: nedodává energii (termotlánek) $T \rightarrow U$

aktivní senzor: dodává vlastní energii (radar, sonar)

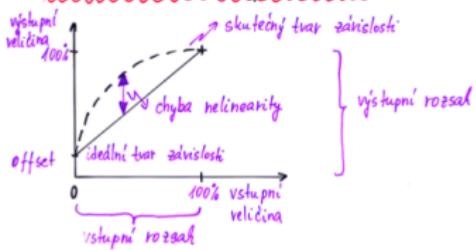
analogový x digitální senzor

5) kalibrace: vztah mezi měřenou veličinou a signálním výstupem; lineární do X_0 ; saturace \Rightarrow není možné senzor použít



Nežádoucí jevy - zdroje systematických chyb

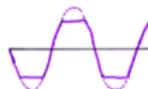
8) statické charakteristiky měř. apar.



c) saturace:

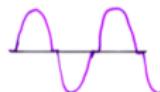


oříznutí vysokých vstupních signálů

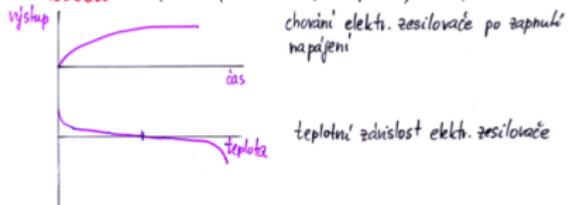


d) zkreslení výst. signálu při přechodu 0 :

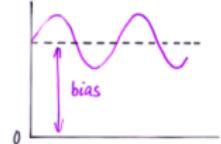
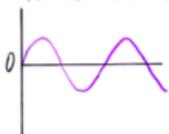
(malé signály přištížený zesiluje až po překročení určité prahové úrovni)



a) posun (drift): způsoben např. teplotou, tlakem, vlhkostí...



e) posunu úrovni výst. signálu (bias):



b) hysteréza:

