Maths pour l'Info 1

– L1 –
2013-2014

TD n° 1: rappels

▶ **Exercice 1** ◀ Ecrire les nombres décimaux 13 et 100 en bases 2 et 8.

▶ **Exercice 2** ◀ Soit $A = \{a, b\}$ un alphabet. Parmi les objets mathématiques suivants, indiquez lesquels sont dans $\mathcal{P}(A^*)$: $\emptyset$, ε, $\{a, ab\}$, $\{\emptyset\}$, $\{\varepsilon\}$, aab, $\{\varepsilon, aab\}$ et $\{\emptyset, \varepsilon\}$.

▶ **Exercice 3** ◀ Parmi les applications suivantes, précisez, en justifiant, lesquelles sont injectives, surjectives, bijectives:

- La fonction $f : \{1, \cdots, 6\} \to \{3, \cdots, 8\}$ définie par $f(k) = 9 - k$;
- La fonction $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ définie par $f(k) = k^2 + k + 1$;
- La même fonction que pour la question précédente, mais de $\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$;

▶ **Exercice 4** ◀ Combien y-a-t'il de mots de longueur n sur un alphabet à k lettres ?

▶ **Exercice 5** ◀ Soit $A = \{a, b\}$ un alphabet. On note $A^+ = A^* \setminus \{\varepsilon\}$. Soit ϕ l'application de A^+ dans A^* qui a un mot non vide $u = u_1 \cdots u_n$ associe le mot $\phi(u) = u_1 \cdots u_{n-1}$. Est-ce que ϕ est injective ? surjective ? bijective ?

▶ **Exercice 6** ◀ Soit E un ensemble. Montrer que pour tout A et B dans $\mathcal{P}(E)$ on a $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

▶ **Exercice 7** ◀ Soit $A = \{a, b\}$ un alphabet. On considère l'application ϕ de $A^* \times A^*$ dans A^* qui a deux mots u et v associe le mot $\phi(u, v) = aubv$.

- Calculez $\phi(ab, a)$, $\phi(a, ab)$, et $\phi(\varepsilon, \varepsilon)$.
- Que vaut $|\phi(u, v)|$?
- Est-ce qu'il existe deux mots différents u et v tels que $\phi(u, v) = \phi(v, u)$?

★ **Exercice 8** ★ Soit $A = \{a, b\}$ et L l'ensemble de tous les mots de A^* qui n'ont pas deux a consécutifs. Pour tout $n \geq 0$, on note $L_n = L \cap A^n$. On note également $\ell_n = |L_n|$.

- Explicitez L_0, L_1, L_2 et L_3.
- En déduire les valeurs de ℓ_0, ℓ_1, ℓ_2 et ℓ_3.

Pour nombre pair $n = 2m$, on considère l'application ϕ_n de L_n dans B^m, où B est l'alphabet $\{A, B, C\}$ définie par

$$\begin{cases} \phi_0(\varepsilon) = \varepsilon \\ \phi_2(ab) = A;\ \phi_2(ba) = B;\ \phi_2(bb) = C; \\ \phi_n(u_1u_2 \ldots u_{2m-1}u_{2m}) = \phi_2(u_1u_2) \cdots \phi_n(u_{2m-1}u_{2m}). \end{cases}$$

- Calculez $\phi_4(abab)$ et $\phi_6(bbbaab)$.
- Justifiez que ϕ_n est bien définie pour tout n pair.
- ϕ_n est-elle injective ? surjective ?
- En déduire que $\ell_{2m} \leq 3^m$ et que $\ell_{2m+1} \leq 2 \cdot 3^m$.
- En déduire que la probabilité qu'un mot de taille n pris uniformément au hasard soit dans L_n tend vers zéro quand $n \to +\infty$.

QCM d'auto-évaluation sur les ensembles (10 minutes)

1. $\{1,3,4,7,11\} \cap \{1,2,7,12\} =$

   ☐ $\{1,7\}$ ☐ $\{11,7,1\}$ ☐ $\{3,4,11\}$

2. $\{a,b,c,d,e\}\Delta\{a,b,f\} =$

   ☐ $\{c,d,e,f\}$ ☐ $\{a,b\}$ ☐ $\{c,d,e\}$

3. $\{a,b,c,d,e\} \setminus \{a,b,f\} =$

   ☐ $\{c,d,e,f\}$ ☐ $\{a,b\}$ ☐ $\{c,d,e\}$

4. Laquelle est toujours vraie ? $\overline{X \cup Y} =$

   ☐ $\overline{X} \cup \overline{Y}$ ☐ $X\Delta Y$ ☐ $\overline{X} \cap \overline{Y}$

5. Laquelle est toujours vraie ? $\overline{X \cap Y} =$

   ☐ $X \cup Y$ ☐ $\overline{X} \cup \overline{Y}$ ☐ $\overline{X} \cap \overline{Y}$

6. $X \cap Y = X$ est vraie si et seulement si

   ☐ $X = Y$ ☐ $X \subset Y$ ☐ $Y \subset X$

7. $X \cup Y = X$ est vraie si et seulement si

   ☐ $X = Y$ ☐ $X \subset Y$ ☐ $Y \subset X$

8. $X\Delta Y = X$ est vraie si et seulement si

   ☐ $X = \emptyset$ ☐ $Y = \emptyset$ ☐ $Y \cap X = \emptyset$

9. $X \subset E$, où E est l'ensemble de référence (cela veut dire qu'on prend les complémentaires par rapport à E). $\overline{(X \cup \overline{\emptyset})}\Delta X =$

   ☐ X ☐ $\emptyset$ ☐ E

10. $X \subset E$, où E est l'ensemble de référence (cela veut dire qu'on prend les complémentaires par rapport à E). $X \cup \overline{(\overline{\emptyset} \cap X)} =$

    ☐ X ☐ $\emptyset$ ☐ E