Mathématiques pour l'Informatique 3

– L2 –
10 avril 2012

Examen

Durée : **1h30**. Documents et calculatrices interdits. Toutes vos réponses doivent être justifiées.

▶ **Exercice 1** ◀ Soit $A = \{a, b, c\}$ un alphabet ordonné avec $a < b < c$. Pour $n \geq 1$, on note E_n l'ensemble des mots de longueur n sur l'alphabet A. Si $u \in E_n$, on note u_1, u_2, …, u_n ses lettres (dans l'ordre). On définit la relation $\mathcal{R}$ sur E_n par :

$$u \;\mathcal{R}\; v \Leftrightarrow \forall i \in \{1, \ldots, n\},\ u_i \leq v_i.$$

(a) Est-ce que $abc \;\mathcal{R}\; bac$? $bbc \;\mathcal{R}\; bac$? $bac \;\mathcal{R}\; bbc$? $bac \;\mathcal{R}\; abc$?

(b) Montrez que pour tout $n \geq 1$, $\mathcal{R}$ est bien une relation d'ordre sur E_n.

(c) Est-ce un ordre total ? est-ce un ordre bien fondé ?

(d) Dessinez le diagramme de Hasse de $\mathcal{R}$ pour E_2, l'ensemble des mots de longueur 2.

▶ **Exercice 2** ◀ Montrez que pour tout entier $n \geq 1$,

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

▶ **Exercice 3** ◀ Soit $A = \{a, b, c\}$. Soit E l'ensemble défini inductivement par :

- la base est $B = \{\varepsilon\}$,
- les règles f et g : pour tout $u \in E$, $f(u) = aub$ et $g(u) = uac$.

(a) Soient $u_1 = aabb$, $u_2 = \varepsilon$, $u_3 = bbaa$, $u_4 = abac$ et $u_5 = caab$. Lesquels sont dans E ? justifiez.

(b) Montrez que pour tout mot $u \in E$, $|u|_a = |u|_b + |u|_c$.

(c) Est-ce que réciproquement, tout mot $u \in A^*$ tel que $|u|_a = |u|_b + |u|_c$ est un mot de E ?

(d) Montrez que l'induction est libre.

(e) Soit ϕ l'application de E dans $\mathbb{N}$ définie inductivement par

$$\begin{cases} \phi(\varepsilon) = 0, \\ \phi(f(u)) = \phi(u), \\ \phi(g(u)) = \phi(u) + 1. \end{cases}$$

Prouvez que pour tout $u \in E$, $\phi(u) = |u|_c$.

▶ **Exercice 4** ◀ On s'intéresse aux formules logiques définies sur trois variable x, y et z. L'ensemble $\mathcal{L}$ des formules, vues comme des arbres, est défini inductivement par

- $B = \{x, y, z\}$,
- $f(F, G) = \underset{F\quad G}{\overset{\wedge}{\diagup\diagdown}}$
- $g(F, G) = \underset{F\quad G}{\overset{\vee}{\diagup\diagdown}}$
- $h(F) = \underset{F}{\overset{\neg}{|}}$

On rappelle que $\vee$ est le "ou" logique : $0 \vee 0 = 0$ et $0 \vee 1 = 1 \vee 0 = 1 \vee 1 = 1$. Que $\wedge$ est le "et" logique : $1 \wedge 1 = 1$ et $0 \wedge 1 = 1 \wedge 0 = 0 \wedge 0 = 0$. Et que $\neg$ est la négation : $\neg 0 = 1$ et $\neg 1 = 0$.

(a) Représentez l'arbre de la formule construite par

$$f\left(h\left(x\right), g\left(y, g\left(z, h\left(x\right)\right)\right)\right).$$

(b) Définissez inductivement une application ϕ de $\mathcal{L}$ dans $\{0, 1\}$ qui calcule l'évaluation d'une formule $F \in \mathcal{L}$ pour $x = 0$, $y = 1$ et $z = 0$.

(c) Définissez inductivement une application ψ de $\mathcal{L}$ dans $\mathcal{L}$, qui simplifie autant de fois que possible la formule en utilisant les règles $\underset{F\quad F}{\overset{\vee}{\diagup\diagdown}} = F$ et $\underset{F\quad F}{\overset{\wedge}{\diagup\diagdown}} = F$.