Maths pour l'Info 3

– L2 –

2013-2014

TD n° 2 : récurrences et clôtures

► **Exercice 1** ◄ On considère l'ensemble $E = \{1, \ldots, 12\}$ des 12 premiers entiers et l'ordre "divise", comme dans le premier exercice de la feuille 1. Dessinez le diagramme de Hasse associé.

► **Exercice 2** ◄ On considère le programme suivant :

```
for(i=1;i<=n;i++)
  for(j=1;j<=i*i;j++)
    printf("*");
```

Montrez qu'il y a $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ étoiles affichées.

► **Exercice 3** ◄

(a) Montrez que la somme des n premiers nombres impairs est un carré.

(b) Donnez une interprétation géométrique.

► **Exercice 4** ◄ Soit l'alphabet $A = \{a, b\}$. On suppose que le mot $u \in A^*$ vérifie l'équation :

$$au = ua.$$

Montrez que u ne contient pas de b.

► **Exercice 5** ◄ Soit $q \neq 1$ un réel. Montrez que pour tout $n \geq 0$,

$$\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Que vaut la somme si $q = 1$?

► **Exercice 6** ◄ On considère la propriété P définie sur les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ par :

$$P(X) = \text{Vrai} \Leftrightarrow \forall x \in X,\ x + 1 \in X.$$

(a) Donnez des exemples de sous-ensembles de $\mathbb{R}$ qui vérifient P et des exemples qui ne vérifient pas P.

(b) Montrez que si $X \neq \emptyset$ est un ensemble fini, alors $P(X) = \text{Faux}$.

(c) Montrez que P est stable par intersection quelconque : si $\mathcal{I}$ est un ensemble d'indices et que les X_i sont des sous-ensembles de $\mathbb{R}$ qui vérifient P alors

$$P\left(\bigcap_{i \in \mathcal{I}} X_i\right) = \text{Vrai}.$$

(d) Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble de tous les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ qui contiennent 0 et qui vérifient P. Quel est l'ensemble $F = \cap_{X \in \mathcal{F}} X$?

(e) Soit $\mathcal{G}$ l'ensemble de tous les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ qui contiennent $[0, 1]$ et qui vérifient P. Quel est l'ensemble $G = \cap_{X \in \mathcal{F}} X$?

► **Exercice 7** ◄ Un arbre binaire complet est un arbre dont tous les nœuds ont 0 ou 2 fils. Montrez que si un arbre binaire complet possède $n \geq 0$ nœuds internes (nœuds qui ne sont pas des feuilles), alors il possède exactement $n + 1$ feuilles.