Maths pour l'Info 3

– L2 –

2013-2014

TD n° 3 et n° 4: structures inductives

► **Exercice 1** ◄ Soit $E \subset \{a, b\}^*$ la fermeture inductive de $B = \{\varepsilon\}$ par les deux règles définies pour tout $u \in \{a, b\}^*$:

- $f(u) = u \cdot a$,
- $g(u) = b \cdot u \cdot b$.

(a) Proposez un mot de longueur 4 qui est dans E et un qui n'est pas dans E.

(b) Quelle est la hauteur d'induction de $u = bab$ et de $u = aaa$?

► **Exercice 2** ◄ Dans cet exercice, l'univers est $\Omega = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. On considère l'ensemble E qui est la fermeture inductive de $B = \{(1, 0)\}$ par les règles :

- $f(\,(m, n)\,) = (m + 2, n + 1)$,
- $g(\,(m, n)\,) = (m, m)$,
- $h(\,(m, n), (m', n')\,) = (m + m', n + n')$ (règle d'arité 2).

(a) Parmi les éléments suivants, lesquels sont dans E : $(1, 3)$, $(3, 3)$, $(4, 4)$ et $(4, 0)$?

(b) Dessinez un arbre syntaxique qui permet d'obtenir $(6, 5)$.

► **Exercice 3** ◄ Soit M l'ensemble des mots binaires (sur l'alphabet $B = \{0, 1\}$) contenant autant de 0 que de 1. On considère l'ensemble E défini inductivement par :

- $\varepsilon \in E$
- Pour tout mot $u \in E$, $0u1$ et $1u0$ sont dans E.

A-t-on $M \subset E$? A-t-on $E \subset M$? justifiez.

► **Exercice 4** ◄ Donnez une définition inductive pour les ensembles suivants (et prouvez qu'elle correspond bien) :

(a) Les palindromes sur l'alphabet $\{a, b\}$.

(b) Les mots de $\{a, b\}^*$ n'ayant pas deux a consécutifs.

(c) Les ensembles préfixiels de $\{0, 1\}^*$: ceux sont les ensembles X de mots qui sont stables par préfixes, si $u \in X$ et v préfixe de u alors $v \in X$.

► **Exercice 5** ◄ Soit $E \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ la fermeture inductive de $B = \{0, 0\}$ par les règles

$$f(\,(m, n)\,) = (m + 1, n - 1),$$
$$g(\,(m, n)\,) = (n, m).$$

Montrez que pour tout $(m, n) \in E$ on a $m + n$ pair.

► **Exercice 6** ◄ On définit l'ensemble des arbres binaires complets $\mathcal{C}$ comme étant le sous-ensemble de $\{(,), \circ, \Box\}^*$ défini inductivement par

- la base est $B = \{\Box\}$;
- pour tout $A_1, A_2 \in \mathcal{C}$, $(A_1 \circ A_2) \in \mathcal{C}$.

(a) On définit comme en cours la suite des ensembles B_i. Calculez les éléments de B_0, B_1 et B_2.

(b) Montrez que pour tout $A \in \mathcal{C}$, $|A|_\circ = |A|_\Box - 1$.

(c) A quoi correspondent les symboles $\circ$ et $\Box$ sur la représentation graphique d'un élément de $\mathcal{C}$?

► **Exercice 7** ◄ Le langage de Lukasiewicz Ł sur l'alphabet $A = \{a, b\}$ peut être défini inductivement comme suit:

- Ł contient b
- si $u, v \in$ Ł, alors $auv \in$ Ł

(a) Enumérer les mots de Ł de hauteur d'induction inférieure ou égale à 3.

(b) Montrer que tout mot $u \in$ Ł vérifie : $|u|_b = |u|_a + 1$.

(c) Montrer que tout mot $u \in$ Ł vérifie : $\forall v$ préfixe de u, si $u \neq v$ alors $|v|_a \geq |v|_b$.

► **Exercice 8** ◄ L'ensemble des mots de Motzkin $\mathcal{M}$ sur l'alphabet $\{a, b, c\}$ est défini inductivement par :

- $\varepsilon \in \mathcal{M}$.
- Si $u \in \mathcal{M}$ alors $cu \in \mathcal{M}$
- Si $u, v \in \mathcal{M}$ alors $aubv \in \mathcal{M}$

(a) Quels sont les mots de Motzkin de taille 4 ?

(b) Montrez que si $u \in \mathcal{M}$ et v est un préfixe de u alors $|v|_a \geq |v|_b$.