MAT1260 - Algèbre linéaire II

UQÀM

Feuille d'exercices 1

Exercice 1 Déterminer si les matrices A, B et C sont linéairement indépendantes dans $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$, dans les cas suivants :

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}.$

c) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$

d) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 42 & 2 \\ 1 & -13 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$

Exercice 2 Considérons $\mathbb{R}$ comme espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$.

a) Les vecteurs $1, \sqrt{2}, \sqrt{5}$, sont-ils linéairement indépendants ?

b) Et les vecteurs $1, \sqrt{3}, \sqrt{12}$?

Exercice 3 Considérons $\mathbb{C}$ comme espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

a) À quelles conditions sur $z \in \mathbb{C}$ les vecteurs 1 et z sont-ils linéairement indépendants ?

b) À quelles conditions sur $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ les vecteurs 1 et $\frac{1}{z}$ sont-ils linéairement indépendants ? (Rappel : si $z = a + bi$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, alors $\frac{1}{z} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$.)

c) Montrer que les vecteurs $1, z$ et z^2 sont linéairement dépendents pour tout $z \in \mathbb{C}$. Trouver une relation linéaire entre eux. (Rappel : si $z = a + bi$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, alors $z^2 = a^2 - b^2 + 2abi$.)

Exercice 4 On considère les vecteurs suivants du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ \alpha - 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ \alpha - 1 \end{pmatrix}.$$

À quelles conditions sur le paramètre α, ces trois vecteurs sont-ils linéairement indépendants ?

Exercice 5 On considère les vecteurs suivants du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{Q}^3$:

$$u_1 = (1, 2, -1), \quad u_2 = (0, -1, 0), \quad u_3 = (1, 1, -1), \quad \text{et} \quad u_4 = (1, 3, -1).$$

a) Montrer que le sous-espace vectoriel de $\mathbb{Q}^3$ engendré par u_1 et u_2 est égal au sous-espace vectoriel de $\mathbb{Q}^3$ engendré par u_3 et u_4.

b) Soit $u_5 = (0, 0, 1) \in \mathbb{Q}^3$. Montrer que (u_1, u_2, u_5) est une base de $\mathbb{Q}^3$.

c) Calculer les coordonnées des vecteurs $(5, 5, 5), (0, 0, 7)$ et $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}\right)$ dans la base (u_1, u_2, u_5).

Exercice 6 On considère les vecteurs suivants du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Montrer que (v_1, v_2, v_3, v_4) est une base de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

b) Soient a, b, c, d des nombres réels. Calculer les coordonnées du vecteur (a, b, c, d) dans la base (v_1, v_2, v_3, v_4).

c) Calculer les coordonnées de chacun des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^4$ dans la base (v_1, v_2, v_3, v_4).