MAT1260 - Algèbre linéaire II

UQÀM

# Feuille d'exercices 2

**Exercice 1** Soit $\mathfrak{L}$ un espace vectoriel et $\ell, m, n$ trois vecteurs de $\mathfrak{L}$. Démontrer que

$$\text{span}\{\ell, m, n\} = \text{span}\{\ell + m, \ell + n, m + n\}.$$

**Exercice 2** Soient $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{M}$ deux espaces vectoriels. Considérons l'espace vectoriel $\mathfrak{L} \times \mathfrak{M}$ vu dans le Devoir 1.

Rappel : les opérations sont définies par
- $(\ell_1, m_1) + (\ell_2, m_2) = (\ell_1 + \ell_2, m_1 + m_2)$ ;
- $\alpha(\ell, m) = (\alpha\ell, \alpha m)$.

Soient $\mathfrak{L}_o = \mathfrak{L} \times \left\{\vec{0}_{\mathfrak{M}}\right\}$ et $\mathfrak{M}_o = \left\{\vec{0}_{\mathfrak{L}}\right\} \times \mathfrak{M}$.

a) Montrer que $\mathfrak{L}_o$ et $\mathfrak{M}_o$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathfrak{L} \times \mathfrak{M}$.

b) Montrer que $\mathfrak{L} \times \mathfrak{M} = \mathfrak{L}_o \oplus \mathfrak{M}_o$.

c) Supposons que $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{M}$ sont deux espaces vectoriels de dimension finie. Pour chacun des espaces vectoriels suivants donner une base (et en déduire la dimension) en fonction d'une base de $\mathfrak{L}$ et d'une base de $\mathfrak{M}$ (et donc des dimensions de $\mathfrak{L}$ et de $\mathfrak{M}$).

   i) $\mathfrak{L}_o$,

   ii) $\mathfrak{M}_o$,

   iii) $\mathfrak{L} \times \mathfrak{M}$.

**Exercice 3** Considérons l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{K})$ avec $\mathbb{K}$ un corps.

a) Les ensembles suivantes sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{K})$ ? Justifier la réponse et le cas affirmatif calculer la dimension et donner une base.

   i) L'ensemble $\mathrm{GL}_3(\mathbb{K})$ des matrices inversibles de $\mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{K})$.

   ii) L'ensemble $\mathfrak{L}$ des matrices symétriques de $\mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{K})$, c'est-à-dire les matrices $A \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{K})$ telles que $A = A^\top$.

   iii) L'ensemble $\mathfrak{M}$ des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{K})$, c'est-à-dire les matrices $A \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{K})$ telles que $A = -A^\top$.

b) Les sous-espaces $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{M}$ sont-ils supplémentaires ?

**Exercice 4** Soit la matrice

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Montrer que l'ensemble

$$\mathfrak{L} = \{A \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R}) \mid AD = DA\}$$

est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$.

b) Quelle est la dimension de $\mathfrak{L}$ sur $\mathbb{R}$ ?

c) Donner une base de $\mathfrak{L}$.

**Exercice 5** On considère les vecteurs de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{Q})$ suivants :

$$u_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad u_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

a) Montrer que $\operatorname{span}\{u_1, u_2\} = \operatorname{span}\{u_3, u_4\}$.

b) Montrer que $u_1$ et $u_2$ sont linéairement indépendants. Compléter ces vecteurs pour former une base de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{Q})$.

c) En utilisant le point précédent, trouver un supplémentaire de $\operatorname{span}\{u_1, u_2\}$ dans $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{Q})$.

**Exercice 6** On considère les vecteurs de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{C})$ suivants :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},\ v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } v_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier votre réponse.

a) $\operatorname{span}\{v_1, v_2, v_3\} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$.

b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \operatorname{span}\{v_1, v_2\} \cap \operatorname{span}\{v_2, v_3, v_4\}$.

c) $\dim(\operatorname{span}\{v_1, v_2\} \cap \operatorname{span}\{v_2, v_3, v_4\}) = 1$.

d) $\operatorname{span}\{v_1, v_2\} + \operatorname{span}\{v_2, v_3, v_4\} = \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{C})$.

e) $\operatorname{span}\{v_1, v_2\} \oplus \operatorname{span}\{v_2, v_3, v_4\} = \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{C})$.

f) $\operatorname{span}\{v_4, v_5\}$ est un supplémentaire de $\operatorname{span}\{v_1, v_2, v_3\}$ dans $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{C})$.