MAT1260 - Algèbre linéaire II

UQÀM

Feuille d'exercices 4

Exercice 1 Considérons l'espaces $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{C})$ et l'application

$$\begin{array}{rccc} \tau : & \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{C}) & \to & \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{C}) \\ & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} \frac{a+d}{2} & 0 \\ 0 & \frac{a+d}{2} \end{pmatrix} \end{array}$$

a) Montrer que $\tau \in \operatorname{End}(\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{C}))$.

b) Montrer que τ est un idempotent de $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{C})$.

Exercice 2 Considérons les deux sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{C})$

$$\mathfrak{M} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{C} \right\} \quad \text{et} \quad \mathfrak{N} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{C} \right\}.$$

a) Montrer que $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{C}) = \mathfrak{M} \oplus \mathfrak{N}$.

b) Calculer $\pi_{\mathfrak{M}}$ (la projection sur $\mathfrak{M}$ parallèlement $\mathfrak{N}$) et $\pi_{\mathfrak{N}}$ (la projection sur $\mathfrak{N}$ parallèlement $\mathfrak{M}$).

c) Calculer $\sigma_{\mathfrak{M}}$ (la symétrie par rapport à $\mathfrak{M}$ parallèlement $\mathfrak{N}$) et $\sigma_{\mathfrak{N}}$ (la symétrie sur $\mathfrak{N}$ parallèlement $\mathfrak{M}$).

Exercice 3 Considérons les deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{C})$ et l'application $g : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{C})$ telle que

$$g(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2i \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad g(1,-1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2i & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Montrer que $\big((1,1),(1,-1)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

b) Montrer que $g \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^2, \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{C})\right)$ et en définir l'action pour un vecteur $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ quelconque.

c) Quelle est la dimension de span $\{g(1,1), g(1,-1)\}$?

Exercice 4 Soient $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel (Rappel : un sous-espace vectoriel est un espace vectoriel).

Considérons la fonction

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathfrak{M} \oplus \mathfrak{N} & \rightarrow & \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \\ & \ell = m_\ell + n_\ell & \mapsto & (m_\ell, n_\ell) \end{array}$$

où $\ell = m_\ell + n_\ell$ est l'unique décomposition de ℓ en somme d'un vecteur $m_\ell \in \mathfrak{M}$ et d'un vecteur $n_\ell \in \mathfrak{N}$.

a) Monter que φ est une bijection.

b) Montrer que $\varphi \in \mathcal{L}(\mathfrak{M} \oplus \mathfrak{N}, \mathfrak{M} \times \mathfrak{N})$ et donc qu'elle est un isomorphisme.

c) Calculer l'application réciproque φ^{-1}.

d) En utilisant les points précédents, en déduire que l'application

$$\begin{array}{rccc} h : & \mathbb{Q}^6 & \rightarrow & \mathbb{Q}^2 \times \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{Q}) \\ & (a,b,c,d,e,f) & \mapsto & \left((a,b), \begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix}\right) \end{array}$$

est un isomorphisme et calculer l'application h^{-1} (N.B. : les espaces $\mathbb{Q}^2$ et $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{Q})$ ne sont pas des sous-espaces de $\mathbb{Q}^6$, mais...).

Exercice 5 Soit $f \in \mathrm{End}(\mathfrak{L})$, avec $\mathfrak{L}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et $u_1, u_2, \ldots, u_n$ des vecteurs de $\mathfrak{L}$.

a) Montrer que si $f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_n)$ sont linéairement indépendants sur $\mathfrak{L}$ alors $u_1, u_2, \ldots, u_n$ sont aussi linéairement indépendants sur $\mathfrak{L}$.

b) La réciproque est-elle vraie ? Sinon à quelle condition l'est-elle ?

c) Montrer que si $u_1, u_2, \ldots, u_n$ engendrent $\mathfrak{L}$ alors $f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_n)$ engendrent un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{L}$.

d) À quelle condition ce sous-espace vectoriel coïncide avec $\mathfrak{L}$?

Exercice 6 Considérons la fonction

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R}^4 \\ & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & (a+b, a+c, a+d, b+c) \end{array}$$

a) Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}), \mathbb{R}^4)$.

b) Calculer $\mathrm{Ker}(f)$.

c) L'application f est-elle injective ? Est-elle surjective ?

Exercice 7 Considérons la fonction

$$\begin{array}{rccc} t: & \mathbb{C} & \to & \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \\ & z & \mapsto & \begin{pmatrix} \Re(z) & \Im(z) \\ -\Im(z) & \Re(z) \end{pmatrix} \end{array}$$

où pour tout $z \in \mathbb{C}$ on dénote $\Re(z)$ sa partie réelle et $\Im(z)$ sa partie imaginaire.

a) L'application t est-elle linéaire ?

b) L'application t est-elle injective ? (utiliser la définition d'injectivité)

c) Déduire du point précédent la forme de $\mathrm{Ker}(t)$.

d) L'application t est-elle surjective ?

e) Calculer $\mathrm{Im}(t)$.

f) La formule du Théorème du rang est-elle vérifié ? (On considère $\mathbb{C}$ et $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ comme espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$.)

Exercice 8 Soit $\tau \in \mathrm{End}(\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{C}))$ l'endomorphisme défini dans l'Exercice 1.

a) Calculer $\mathrm{Ker}(\tau)$ et $\mathrm{Im}(\tau)$.

b) Montrer que $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{C}) = \mathrm{Ker}(\tau) \oplus \mathrm{Im}(\tau)$ (Utilisez l'Exercice 2).

Considérons maintenant les deux endomorphismes

$$\begin{array}{rccc} p: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (a,b) & \mapsto & (0,b) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (a,b) & \mapsto & (b,0) \end{array}$$

c) Calculer $\mathrm{Ker}(p), \mathrm{Im}(p), \mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

d) A-t-on $\mathbb{R}^2 = \operatorname{Ker}(p) \oplus \operatorname{Im}(p)$?

e) A-t-on $\mathbb{R}^2 = \operatorname{Ker}(f) \oplus \operatorname{Im}(f)$?

Exercice 9 Soit $\mathfrak{L}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $p \in \operatorname{End}(\mathfrak{L})$.

a) Prouver que si p est un idempotent alors $\mathfrak{L} = \operatorname{Ker}(p) \oplus \operatorname{Im}(p)$.

b) Prouver que si p est un idempotent alors $\operatorname{Im}(p) = \operatorname{Ker}(\mathrm{id}_{\mathfrak{L}} - p)$.

c) En déduire que si p est un idempotent alors $\mathfrak{L} = \operatorname{Ker}(p) \oplus \operatorname{Ker}(\mathrm{id}_{\mathfrak{L}} - p)$.

d) Prouver la réciproque du point d).

e) La réciproque du point a) est elle vraie ? Justifiez.