MAT1260 - Algèbre linéaire II

UQÀM

Feuille d'exercices 5

Exercice 1 Considérons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}).$$

a) Calculer le polynôme caractéristique p_A de la matrice.

b) Déterminer les valeurs propres λ_1, λ_2 de A.

c) Déterminer les multiplicités des deux valeurs propres.

d) Déterminer des vecteurs propres ℓ_1, ℓ_2 pour les valeurs propres λ_1, λ_2 respectivement.

e) Calculer la matrice de passage P de la base canonique à la base (ℓ_1, ℓ_2).

f) Calculer la matrice diagonale D conjuguée à A (c'est-à-dire la matrice $D = P^{-1}AP$).

g) Calculer la matrice A^{10}.

Exercice 2 Considérons l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ défini par

$$\begin{array}{llcl} f: & \mathbb{C}^3 & \to & \mathbb{C}^3 \\ & (x, y, z) & \mapsto & (-z, x + y + z, -x) \end{array}$$

a) Calculer le polynôme caractéristique p_f de l'endomorphisme.

b) Déterminer les valeurs propres de f et leur multiplicités.

c) Déterminer les sous-espaces propres de $\mathbb{C}^3$ par rapport à f et en calculer la dimension sur $\mathbb{C}$.

d) En utilisant le point précédent, trouver une base de $\mathbb{C}^3$ telle que la matrice associée à f dans cette base soit diagonale.

Exercice 3 Montrer qu'une matrice symétrique de $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ est toujours diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4 Soit $f \in \mathrm{End}(\mathfrak{L})$ un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

Montrer que si ℓ est un vecteur propre de f pour la valeur propre λ, alors ℓ est aussi un vecteur propre de l'endomorphisme $\alpha f + \beta \mathrm{id}_{\mathfrak{L}}$ pour la valeur propre $\alpha\lambda + \beta$. En déduire que f est diagonalisable si et seulement si $\alpha f + \beta \mathrm{id}_{\mathfrak{L}}$ l'est.

$\big($<u>*Suggestion*</u> : une façon simple de le montrer consiste en l'utiliser les matrices associées. Sinon, vous pouvez démontrer d'abord que $\mathrm{Ker}(\gamma g) = \mathrm{Ker}(g)$ pour tout scalaire $\gamma \neq 0$ et tout endomorphisme $g\big)$.