MAT1260 - Algèbre linéaire II

UQÀM

Feuille d'exercices 6

Exercice 1 Pour chacune des matrices suivantes à coefficients dans $\mathbb{C}$, calculer le polynôme caractéristique, déterminer les valeurs propres, décrire (comme espace des matrices colonnes) les sous-espaces propres et les sous-espaces caractéristiques et, quand c'est possible, diagonaliser ou trianguler :

— $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$;

— $B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -8 & -6 \end{pmatrix}$;

— $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$;

— $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$;

— $E = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$;

— $F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

— $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 2 Soient A, B, C, D, E, F comme dans l'Exercice 1. Calculer les expressions suivantes

a) $A^2 - 4A$;

b) B^2 ;

c) $C^3 - 4C^2$;

d) $D^4 - 4D^3 + 20D - 16I_{4\times 4}$;

e) $(E+1)^2(E-1)^2 + E + I_{3\times 3}$;

f) $(F-1)^{19} + I_{3\times 3}$.

Exercice 3 Considérons la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par

$$f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$$

avec $f_1 = 0$ et $f_2 = 1$.

a) Trouver une matrice F telle que

$$\begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_{n+2} \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix}.$$

b) Montrer que F est diagonalisable et que ses deux valeur propres $\varphi, \tilde{\varphi}$ sont distinctes. Calculer le scalaire $\varphi \cdot \tilde{\varphi}$.

c) Trouver deux vecteurs propres pour les valeurs propres φ et $\tilde{\varphi}$ respectivement.

d) Calculer la matrice de transition P telle que

$$F = P \begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & \tilde{\varphi} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

e) En déduire que

$$f_{n+1} = \frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n\sqrt{5}}.$$