MAT1260 - Algèbre linéaire II

UQÀM

Feuille d'exercices 7

Exercice 1 Considérons l'endomorphisme $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ ayant comme matrice associée dans la base canonique

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

a) Calculer le polynôme caractéristique p_f.

b) Calculer les sous-espaces propres et les sous-espaces caractéristiques.

c) Calculer le polynôme minimal m_f.

d) Donner des bases des sous-espaces caractéristiques et en déduire une base de $\mathbb{R}^3$.

e) Donner la matrice associée à f dans la base calculée dans le point précédent.

Exercice 2 Soit $n \geq 1$ et $\mathbb{K}$ un corps.

a) Soit $A, B \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$. Montrer que si AB est nilpotente, alors BA l'est aussi.

b) Donner un exemple de deux matrices $C, D \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ nilpotentes telles $C + D$ ne soit pas nilpotente. A-t-on $CD = DC$?

Exercice 3 Soit A la matrice définie dans l'Exercice 1.

a) Déterminer l'endomorphisme d tel que sa restriction à chaque sous-espace caractéristique pour la valeur propre λ soit l'homothétie $\lambda \mathrm{id}$.

b) En utilisant la décomposition de Dunford, trouver l'endomorphisme nilpotent n tel que $f = d + n$ et vérifier que $d \circ n = n \circ d$.

c) Trouver la décomposition de Dunford de l'endomorphisme ayant comme matrice associée dans une certaine base

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$