MAT1260 - Algèbre linéaire II

UQÀM

Devoir 3

avril 2017

<u>**Consignes**</u> **:** Ce devoir doit être rendu avant **9h00** de **mardi 18 avril 2017** soit :

— en utilisant la boîte pour la remise des travaux étudiants (à côté du PK-5120),

— en pièce jointe par courriel aux adresses `francesco.dolce@lacim.ca` <u>**et**</u> `nadia.l@lacim.ca`.

Répondez aux questions en donnant toutes les justifications nécessaires. La pondération est telle que la note finale peut excéder 100 points.

L'évaluation tiendra compte de l'exactitude du raisonnement ainsi que de la clarté de la rédaction (qualité du français écrit, bon usage du langage et des symboles mathématiques).

Attention à ne pas plagier la copie de ceux avec qui vous rechercheriez les solutions des problèmes ou des textes lus. (voir le règlement sur le plagiat à l'UQAM).

Exercice 1 (40 points) Soit $\mathfrak{L}$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Considérons un endomorphisme $f \in \mathrm{End}\,(\mathfrak{L})$ et un entier $m \geq 1$ tels que $f^m = \mathrm{id}_{\mathfrak{L}}$.

a) Montrer que f est inversible et trouver l'endomorphisme f^{-1}.

b) Le scalaire 0 est-il dans $\mathrm{Spect}\,(f)$?

c) Donner un exemple de polynôme annulateur pour f.

(<u>Rappel</u> : un polynôme $P \in \mathbb{C}[x]$ *annule* f si $P(f)$ est l'endomorphisme nul.)

d) En utilisant le polynôme minimal de f, montrer que toutes les valeurs propres sont des racines de l'unité.

(Rappel : une *racine k-ième de l'unité* est un nombre complexe ζ tel que $\zeta^k = 1$ pour un certain entier $k \geq 1$.)

e) En déduire que f est diagonalisable.

Exercice 2 (50 points) Considérons la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{Q}).$$

a) Calculer le polynôme caractéristique de A.

b) Calculer le polynôme minimal de A.

c) Déterminer la décomposition de Dunford de A.

(Rappel : la *décomposition de Dunford* d'une matrice consiste à trouver une matrice D diagonalisable et une matrice N nilpotente telles que $A = D + N$ et que $DN = ND$.)

d) Calculer A^n pour tout $n \geq 0$.

(Suggestion : distinguer les cas $n = 0, n = 1$ et $n \geq 2$.)

Exercice 3 (20 points) Soit $\mathfrak{L}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit g un endomorphisme triangularisable sur $\mathbb{K}$ tel que $\mathrm{Spect}(g) = \{\alpha\}$ avec $\alpha \in \mathbb{K}$. Déterminer la décomposition de Dunford de g.

(Suggestion : déterminer d'abord la matrice associée à g dans une base opportune. Ensuite, déterminer les matrices associée aux endomorphismes diagonalisable et nilpotent qui décomposent g.)