MAT1260 - Algèbre linéaire II

Examen de mi-session

10 mars 2017

Consignes : Vous n'avez droit à aucun document (notes de cours, livres, etc.) ni appareil électronique (tablette, cellulaire, calculatrice, etc.).

Répondez aux questions en donnant toutes les justifications nécessaires. La pondération est telle que la note finale peut excéder 100 points.

Exercice 1 (15 points) Soit $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \infty\}$. Prouver que $(\mathbb{R}_+, \cdot, \star)$ est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel avec les opérations $\cdot$ et $\star$ définies par :

$$\begin{array}{rrcl} \cdot : & \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ & (x,y) & \mapsto & xy \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rrcl} \star : & \mathbb{Q} \times \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ & (\alpha,x) & \mapsto & x^\alpha \end{array}$$

(*Attention* : $(x^\alpha)^\beta \neq x^{(\alpha^\beta)}$.)

Exercice 2 (10 points) Considérons $\mathbb{R}_n[x]$ l'espace des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à $n \geq 1$. On sait que la dimension de $\mathbb{R}_n[x]$ sur $\mathbb{R}$ est $n+1$. Montrer que le $(n+1)$-uplet

$$\big(1, (x-1), (x-1)^2, \ldots, (x-1)^n\big)$$

est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.

(*Suggestion* : raisonnez par récurrence sur n en considérant le coefficient dominant d'une combinaison linéaire quelconque.)

Exercice 3 (15 points) Soit $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ l'espace des suites numériques sur un corps $\mathbb{K}$.

Rappel : les opérations sont définies par
- $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$;
- $\alpha(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\alpha a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Fixons deux scalaires $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Considérons le sous-ensemble $\mathfrak{M}$ de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ défini par

$$\mathfrak{M} = \left\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \forall\, n \geq 2,\ a_n = \alpha a_{n-1} + \beta a_{n-2}\right\}.$$

a) Montrer que $\mathfrak{M}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

b) Quelle est la dimension de $\mathfrak{M}$?

(*Suggestion* : quel est le nombre minimum d'éléments de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathfrak{M}$ nécessaires pour déterminer entièrement cette suite ?)

c) Considérons le sous-ensemble $\mathfrak{N}$ de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ défini par

$$\mathfrak{N} = \left\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \forall\, n \geq 2,\ a_n = \alpha a_{n-1} + \beta a_{n-2} + 1\right\}.$$

L'ensemble $\mathfrak{N}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$?

Exercice 4 (20 points) Considérons les sous-ensembles suivants du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{K})$ des matrices carrées de taille 3×3 à coefficients dans $\mathbb{K}$

$$\mathfrak{B} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & \delta & \varepsilon \\ 0 & 0 & \zeta \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{K}) \right\} \quad \text{et} \quad \mathfrak{C} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \beta & \gamma & 0 \\ \delta & \varepsilon & \zeta \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{K}) \right\}$$

a) Montrer que $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{C}$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{K})$.

b) Déterminer le sous-espace vectoriel $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}$ de $\mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{K})$.

c) Calculer les dimensions de $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ et $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}$.

d) Énoncer la Formule de Grassmann et en donner un example en utilisant les points précédents.

Exercice 5 (45 points) Considérons le $\mathbb{R}$-espace $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ des matrices carrées de taille 2×2 à coefficients réels.

On définit les deux applications $S, T : \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ par

$$S\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & 2a-b \\ b+d & 2c-d \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & a \\ c & b \end{pmatrix}.$$

a) Montrer que S est un endomorphisme.

b) Donner une forme explicite du noyau de S.

c) Quel est le rang de S ? (Rappel : le *rang* est la dimension de l'image.)

d) Sachant que l'application T est linéaire, T est-elle un automorphisme ?

e) Calculer les matrices associées à S et à T dans la base canonique de $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$.

(Rappel : la matrice associée à un endomorphisme de $\mathfrak{L}$ a taille $(\dim(\mathfrak{L}))^2$.)

f) L'application $T \circ S$ est-elle un endomorphisme ? Si tel est le cas, calculer la matrice associée à $T \circ S$ dans la base canonique de $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$.

g) Calculer

$$T^{369}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

(*Suggestion* : déterminer d'abord l'action de T^3 sur une matrice quelconque.)

Exercice 6 (15 point) Soit $\mathfrak{L}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f, g \in \mathrm{End}(\mathfrak{L})$ deux endomorphismes tels que

$$f = f \circ g \circ f \quad \text{et} \quad g = g \circ f \circ g.$$

Montrer que $\mathfrak{L} = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(g)$.

(*Suggestion* : Tout vecteur peut s'écrire comme $\ell = \ell - (g \circ f)(\ell) + (g \circ f)(\ell)$.)