



UNIVERSITÉ  
PARIS-EST  
MARNE-LA-VALLÉE

ÉCOLE DOCTORALE UNIVERSITÉ — PARIS-EST  
Mathématiques et STIC



*Reseau de Recherche Doctorale en  
Mathématiques de l'Île-de-France - DIM  
Accueil doctorands 2013*

Francesco Dolce

22 octobre 2013

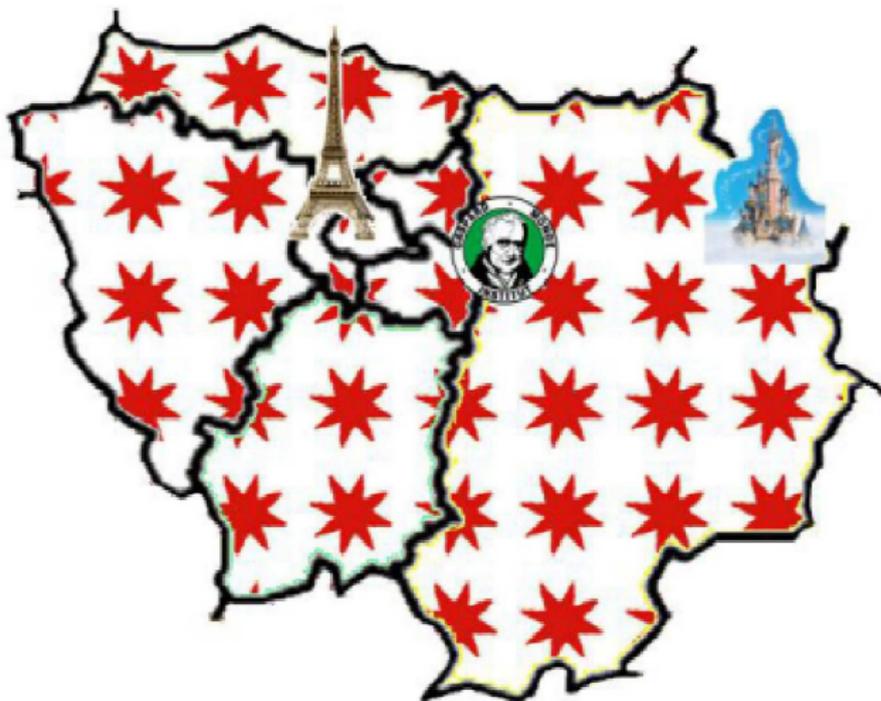
## Formation



- Laurea Triennale (*licence*) en Mathématiques à l'Università degli Studi di Palermo.
- Laurea Specialistica (*master*) en Mathématiques à l'Università degli Studi di Palermo.
- Master d'excellence Bézout (Informatique, Algo-Bio-Combi) à l'Université Paris-Est Marne-la-Vallée.
- Thèse à l'École Doctorale MSTIC (Mathématiques ed Sciences et Technologies de l'Information et de la Communication) de l'Université Paris-Est.

# *Mon Labo*

*Laboratoire d'Informatique Gaspard-Monge*





*D'autres gens avec qui je travaille*

# *D'autres gens avec qui je travaille*

Valérie Berthé<sup>1</sup>



<sup>1</sup>CNRS, Université Paris 7

## *D'autres gens avec qui je travaille*

Valérie Berthé<sup>1</sup>, Clelia De Felice<sup>2</sup>



<sup>1</sup>CNRS, Université Paris 7, <sup>2</sup>Università degli Studi di Salerno

## *D'autres gens avec qui je travaille*

Valérie Berthé<sup>1</sup>, Clelia De Felice<sup>2</sup>, Vincent Delecroix<sup>3</sup>



<sup>1</sup>CNRS, Université Paris 7, <sup>2</sup>Università degli Studi di Salerno, <sup>3</sup>Laboratoire  
Bordelais de Recherche en Informatique

## *D'autres gens avec qui je travaille*

Valérie Berthé<sup>1</sup>, Clelia De Felice<sup>2</sup>, Vincent Delecroix<sup>3</sup>, Julien Leroy<sup>4</sup>



<sup>1</sup>CNRS, Université Paris 7, <sup>2</sup>Università degli Studi di Salerno, <sup>3</sup>Laboratoire Bordelais de Recherche en Informatique, <sup>4</sup>Université du Luxembourg

## *D'autres gens avec qui je travaille*

Valérie Berthé<sup>1</sup>, Clelia De Felice<sup>2</sup>, Vincent Delecroix<sup>3</sup>, Julien Leroy<sup>4</sup>,  
Antonio Restivo<sup>5</sup>



<sup>1</sup>CNRS, Université Paris 7, <sup>2</sup>Università degli Studi di Salerno, <sup>3</sup>Laboratoire  
Bordelais de Recherche en Informatique, <sup>4</sup>Université du Luxembourg,  
<sup>5</sup>Università degli Studi di Palermo

## *D'autres gens avec qui je travaille*

Valérie Berthé<sup>1</sup>, Clelia De Felice<sup>2</sup>, Vincent Delecroix<sup>3</sup>, Julien Leroy<sup>4</sup>,  
Antonio Restivo<sup>5</sup>, Christophe Reutenauer<sup>6</sup>



<sup>1</sup>CNRS, Université Paris 7, <sup>2</sup>Università degli Studi di Salerno, <sup>3</sup>Laboratoire  
Bordelais de Recherche en Informatique, <sup>4</sup>Université du Luxembourg,  
<sup>5</sup>Università degli Studi di Palermo, <sup>6</sup>Université du Québec à Montréal

## *D'autres gens avec qui je travaille*

Valérie Berthé<sup>1</sup>, Clelia De Felice<sup>2</sup>, Vincent Delecroix<sup>3</sup>, Julien Leroy<sup>4</sup>,  
Antonio Restivo<sup>5</sup>, Christophe Reutenauer<sup>6</sup>, Giuseppina Rindone<sup>7</sup>



<sup>1</sup>CNRS, Université Paris 7, <sup>2</sup>Università degli Studi di Salerno, <sup>3</sup>Laboratoire  
Bordelais de Recherche en Informatique, <sup>4</sup>Université du Luxembourg,  
<sup>5</sup>Università degli Studi di Palermo, <sup>6</sup>Université du Québec à Montréal,  
<sup>7</sup>Université Paris Est Marne-la-Vallée

# *Sujet de thèse*

*Codes bifixes, combinatoire des mots et systèmes dynamiques symboliques*

- Combinatoire des mots ;
- Systèmes dynamiques ;
- Échanges d'intervalle ;
- Ensembles Sturmien ;
- Condition de l'arbre ;
- Codes bifixes ;
- Groupe libre ;
- Etc. . . .

# *Un exemple : le mot de Fibonacci*

*Combinatoire de mots*

$$\left\{ \begin{array}{l} f_0 = b \\ f_1 = a \\ f_{n+2} = f_{n+1}f_n \end{array} \right.$$



# Un exemple : le mot de Fibonacci

Combinatoire de mots

$$\left\{ \begin{array}{l} f_0 = b \\ f_1 = a \\ f_{n+2} = f_{n+1}f_n \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} f_0 = b \\ f_1 = a \end{array}$$



# Un exemple : le mot de Fibonacci

Combinatoire de mots

$$\left\{ \begin{array}{l} f_0 = b \\ f_1 = a \\ f_{n+2} = f_{n+1}f_n \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} f_0 = b \\ f_1 = a \\ f_2 = ab \end{array}$$



# Un exemple : le mot de Fibonacci

Combinatoire de mots

$$\left\{ \begin{array}{l} f_0 = b \\ f_1 = a \\ f_{n+2} = f_{n+1}f_n \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} f_0 = b \\ f_1 = a \\ f_2 = ab \\ f_3 = aba \end{array}$$



# Un exemple : le mot de Fibonacci

Combinatoire de mots

$$\left\{ \begin{array}{l} f_0 = b \\ f_1 = a \\ f_{n+2} = f_{n+1}f_n \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} f_0 = b \\ f_1 = a \\ f_2 = ab \\ f_3 = aba \\ f_4 = abaab \end{array}$$



# Un exemple : le mot de Fibonacci

Combinatoire de mots

$$\left\{ \begin{array}{l} f_0 = b \\ f_1 = a \\ f_{n+2} = f_{n+1}f_n \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} f_0 = b \\ f_1 = a \\ f_2 = ab \\ f_3 = aba \\ f_4 = abaab \\ f_5 = abaababa \end{array}$$



# Un exemple : le mot de Fibonacci

Combinatoire de mots

$$\left\{ \begin{array}{l} f_0 = b \\ f_1 = a \\ f_{n+2} = f_{n+1}f_n \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} f_0 = b \\ f_1 = a \\ f_2 = ab \\ f_3 = aba \\ f_4 = abaab \\ f_5 = abaababa \\ f_6 = abaababaabaab \end{array}$$



# Un exemple : le mot de Fibonacci

Combinatoire de mots

$$\left\{ \begin{array}{l} f_0 = b \\ f_1 = a \\ f_{n+2} = f_{n+1}f_n \end{array} \right.$$



$$f_0 = b$$

$$f_1 = a$$

$$f_2 = ab$$

$$f_3 = aba$$

$$f_4 = abaab$$

$$f_5 = abaababa$$

$$f_6 = abaababaabaab$$

...

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = abaababaabaababaababa \dots$$

# *Un exemple : le mot de Fibonacci*

## *Systèmes dynamiques*

$$\begin{cases} \sigma(a) = ab \\ \sigma(b) = a \end{cases}$$

# *Un exemple : le mot de Fibonacci*

## *Systèmes dynamiques*

$$\begin{cases} \sigma(a) = ab \\ \sigma(b) = a \end{cases} \quad a$$

# *Un exemple : le mot de Fibonacci*

*Systèmes dynamiques*

$$\begin{cases} \sigma(a) = ab \\ \sigma(b) = a \end{cases} \quad \sigma(a) = \begin{matrix} a \\ ab \end{matrix}$$

# *Un exemple : le mot de Fibonacci*

*Systèmes dynamiques*

$$\begin{cases} \sigma(a) = ab \\ \sigma(b) = a \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \sigma(a) &= a \\ \sigma^2(a) &= aba \end{aligned}$$

# *Un exemple : le mot de Fibonacci*

*Systèmes dynamiques*

$$\begin{cases} \sigma(a) = ab \\ \sigma(b) = a \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \sigma(a) &= a \\ \sigma^2(a) &= ab \\ \sigma^3(a) &= abaab \end{aligned}$$

# *Un exemple : le mot de Fibonacci*

*Systèmes dynamiques*

$$\begin{cases} \sigma(a) = ab \\ \sigma(b) = a \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \sigma(a) &= a \\ \sigma^2(a) &= ab \\ \sigma^3(a) &= abaab \\ \sigma^4(a) &= abaababa \end{aligned}$$

# *Un exemple : le mot de Fibonacci*

*Systèmes dynamiques*

$$\begin{cases} \sigma(a) = ab \\ \sigma(b) = a \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \sigma(a) &= a \\ \sigma^2(a) &= ab \\ \sigma^3(a) &= abaab \\ \sigma^4(a) &= abaababa \\ \sigma^5(a) &= abaababaabaab \end{aligned}$$

# Un exemple : le mot de Fibonacci

*Systèmes dynamiques*

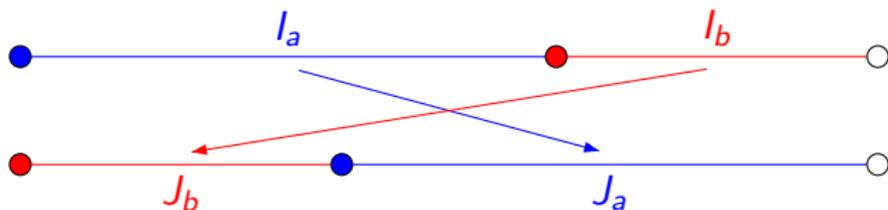
$$\begin{cases} \sigma(a) = ab \\ \sigma(b) = a \end{cases}$$

$$\begin{aligned} a & \\ \sigma(a) &= ab \\ \sigma^2(a) &= aba \\ \sigma^3(a) &= abaab \\ \sigma^4(a) &= abaababa \\ \sigma^5(a) &= abaababaabaab \\ &\dots \\ \sigma^\omega(a) &= abaababaabaababaababa\dots \end{aligned}$$

# Un exemple : le mot de Fibonacci

Echanges d'intervalle

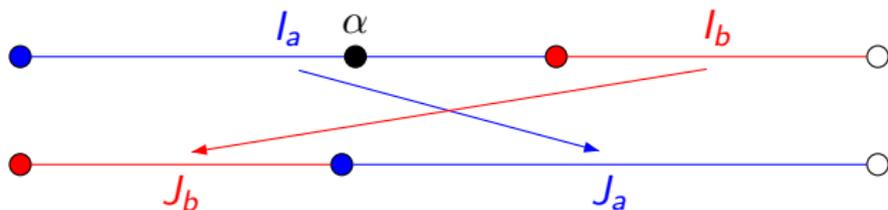
$$T(z) = \begin{cases} z + \alpha & \text{si } z \in [0, 1 - \alpha[, \\ z + 1 - \alpha & \text{si } z \in [1 - \alpha, 1[. \end{cases}$$



# Un exemple : le mot de Fibonacci

Echanges d'intervalle

$$T(z) = \begin{cases} z + \alpha & \text{si } z \in [0, 1 - \alpha[, \\ z + 1 - \alpha & \text{si } z \in [1 - \alpha, 1[. \end{cases}$$

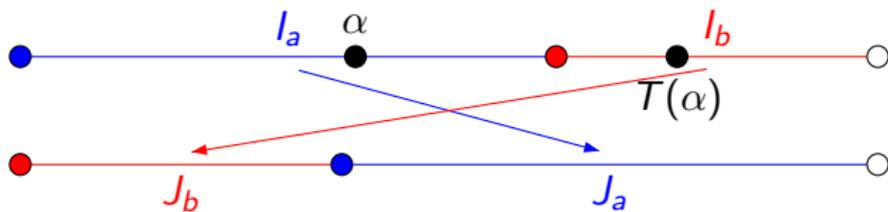


$$\Sigma_T(z) = a b a a b a \dots$$

# Un exemple : le mot de Fibonacci

Echanges d'intervalle

$$T(z) = \begin{cases} z + \alpha & \text{si } z \in [0, 1 - \alpha[, \\ z + 1 - \alpha & \text{si } z \in [1 - \alpha, 1[. \end{cases}$$

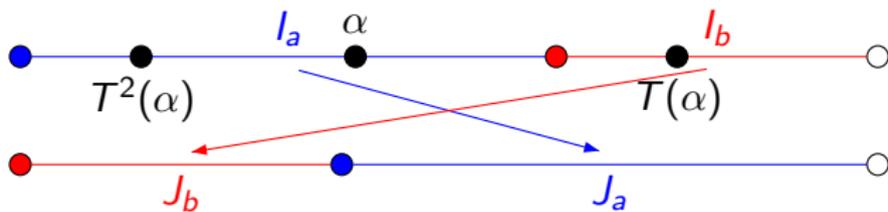


$$\Sigma_T(z) = a b a a a b a a \dots$$

# Un exemple : le mot de Fibonacci

Echanges d'intervalle

$$T(z) = \begin{cases} z + \alpha & \text{si } z \in [0, 1 - \alpha[, \\ z + 1 - \alpha & \text{si } z \in [1 - \alpha, 1[. \end{cases}$$

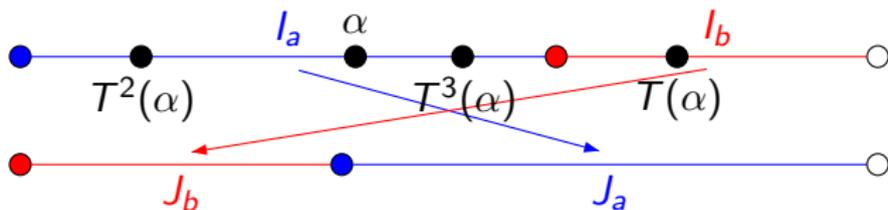


$$\Sigma_T(z) = a b a a b a \dots$$

# Un exemple : le mot de Fibonacci

Echanges d'intervalle

$$T(z) = \begin{cases} z + \alpha & \text{si } z \in [0, 1 - \alpha[, \\ z + 1 - \alpha & \text{si } z \in [1 - \alpha, 1[. \end{cases}$$

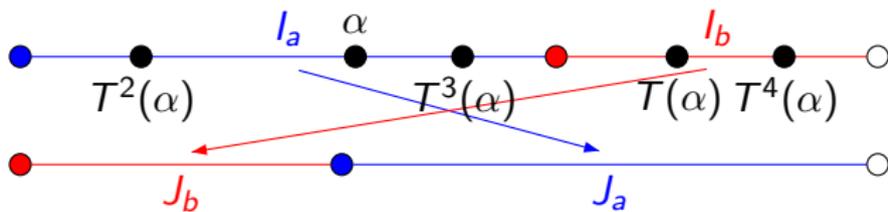


$$\Sigma_T(z) = a b a a b a \dots$$

# Un exemple : le mot de Fibonacci

Echanges d'intervalle

$$T(z) = \begin{cases} z + \alpha & \text{si } z \in [0, 1 - \alpha[, \\ z + 1 - \alpha & \text{si } z \in [1 - \alpha, 1]. \end{cases}$$

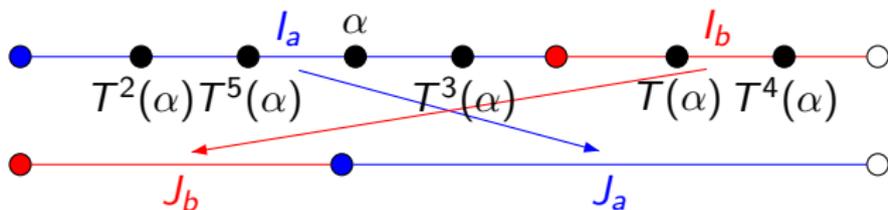


$$\Sigma_T(z) = a b a a b a \dots$$

# Un exemple : le mot de Fibonacci

Echanges d'intervalle

$$T(z) = \begin{cases} z + \alpha & \text{si } z \in [0, 1 - \alpha[, \\ z + 1 - \alpha & \text{si } z \in [1 - \alpha, 1[. \end{cases}$$



$$\Sigma_T(z) = a b a a b a \dots$$

*Merci !*