# *Codes bifixes, échanges d'intervalles et propriété de la base d'indice fini*

Francesco Dolce

5 septembre 2013

# *Outline*

# *Outline*

# *L'équipe et les articles*

Valérie Berthé[1], Clelia De Felice[2], Francesco Dolce[3], Dominique Perrin[3], Christophe Reutenauer[4], Giuseppina Rindone[3]






[1]CNRS, Université Paris 7, [2]Università degli Studi di Salerno, [3]Université Paris Est, [4]Université du Québec à Montréal

# *L'équipe et les articles*

Valérie Berthé[1], Clelia De Felice[2], Francesco Dolce[3], Dominique Perrin[3], Christophe Reutenauer[4], Giuseppina Rindone[3]






[1]CNRS, Université Paris 7, [2]Università degli Studi di Salerno, [3]Université Paris Est, [4]Université du Québec à Montréal

- Return words in interval exchange trasnformations (http://arxiv.org/abs/1305.0120)
- Bifix codes and the finite index basis property (http://arxiv.org/abs/1305.0127)
- Bifix codes in acyclic sets (http://arxiv.org/abs/1308.4260)
- Bifix codes in normal sets (http://arxiv.org/abs/1308.5396)
- Notes on sets of first return (http://arxiv.org/abs/1308.5618)

# *Outline*

# *Ensembles factoriels*

Soient $A$ un alphabet fini non vide, $A^+$ le monoïde des mots sur $A$ avec élément vide $\varepsilon$, $A^n$ l'ensemble des mots de longueur $n$ et $A^\omega$ l'ensemble des mots de longueur infinie.

Un mot $w$ est un *facteur* de $u$ si $u = vwv'$. Le mot $w$ est un *préfixe* si $v = \varepsilon$, un *suffixe* si $v' = \varepsilon$, un *facteur interne* si $v \neq \varepsilon \neq v'$.

# Ensembles factoriels

Soient $A$ un alphabet fini non vide, $A^+$ le monoïde des mots sur $A$ avec élément vide $\varepsilon$, $A^n$ l'ensemble des mots de longueur $n$ et $A^\omega$ l'ensemble des mots de longueur infinie.

Un mot $w$ est un *facteur* de $u$ si $u = vwv'$. Le mot $w$ est un *préfixe* si $v = \varepsilon$, un *suffixe* si $v' = \varepsilon$, un *facteur interne* si $v \neq \varepsilon \neq v'$.

**Exemple**

$A = \{a, b, c, d, r\}$.

$$w = a\,b\,r\,a\,c\,a\,d\,a\,b\,r\,a$$

# Ensembles factoriels

Soient $A$ un alphabet fini non vide, $A^+$ le monoïde des mots sur $A$ avec élément vide $\varepsilon$, $A^n$ l'ensemble des mots de longueur $n$ et $A^\omega$ l'ensemble des mots de longueur infinie.

Un mot $w$ est un *facteur* de $u$ si $u = vwv'$. Le mot $w$ est un *préfixe* si $v = \varepsilon$, un *suffixe* si $v' = \varepsilon$, un *facteur interne* si $v \neq \varepsilon \neq v'$.

**Exemple**

$A = \{a, b, c, d, r\}$.

$$w = a\,b\,r\,a\,c\,a\,d\,a\,b\,r\,a$$

# *Ensembles factoriels*

Soient $A$ un alphabet fini non vide, $A^+$ le monoïde des mots sur $A$ avec élément vide $\varepsilon$, $A^n$ l'ensemble des mots de longueur $n$ et $A^\omega$ l'ensemble des mots de longueur infinie.

Un mot $w$ est un *facteur* de $u$ si $u = vwv'$. Le mot $w$ est un *préfixe* si $v = \varepsilon$, un *suffixe* si $v' = \varepsilon$, un *facteur interne* si $v \neq \varepsilon \neq v'$.

**Exemple**

$A = \{a, b, c, d, r\}$.

$$w = a\,b\,r\,a\,c\,a\,d\,a\,b\,r\,a$$

# *Ensembles factoriels*

Soient $A$ un alphabet fini non vide, $A^+$ le monoïde des mots sur $A$ avec élément vide $\varepsilon$, $A^n$ l'ensemble des mots de longueur $n$ et $A^\omega$ l'ensemble des mots de longueur infinie.

Un mot $w$ est un *facteur* de $u$ si $u = vwv'$. Le mot $w$ est un *préfixe* si $v = \varepsilon$, un *suffixe* si $v' = \varepsilon$, un *facteur interne* si $v \neq \varepsilon \neq v'$.

**Exemple**

$A = \{a, b, c, d, r\}$.

$$w = a\,b\,r\,a\,c\,a\,d\,a\,b\,r\,a$$

# *Ensembles factoriels*

Soient $A$ un alphabet fini non vide, $A^+$ le monoïde des mots sur $A$ avec élément vide $\varepsilon$, $A^n$ l'ensemble des mots de longueur $n$ et $A^\omega$ l'ensemble des mots de longueur infinie.

Un mot $w$ est un *facteur* de $u$ si $u = vwv'$. Le mot $w$ est un *préfixe* si $v = \varepsilon$, un *suffixe* si $v' = \varepsilon$, un *facteur interne* si $v \neq \varepsilon \neq v'$.

**Exemple**

$A = \{a, b, c, d, r\}$.

$$w = a\,b\,r\,a\,c\,a\,d\,a\,b\,r\,a$$

Un ensemble non vide $F \subseteq A^*$ est dit *factoriel* s'il contient tous les facteurs de ses éléments.

**Exemple**

L'ensemble $F(x)$ des facteurs d'un mot $x$ est factoriel.

# *Ensembles récurrents*

Un ensemble $F$ est dit *récurrent* s'il est factoriel et pour tous $u, v \in F$ il existe $w \in F$ t.q. $uwv \in F$.

**Exemple**

Soient $A = \{a, b\}$ et $F = A^* \setminus A^*bbA^*$. $F$ est récurrent car pour tout $u, v \in F$ on a $uav \in F$ .

# Ensembles récurrents

Un ensemble $F$ est dit *récurrent* s'il est factoriel et pour tous $u, v \in F$ il existe $w \in F$ t.q. $uwv \in F$.

**Exemple**

Soient $A = \{a, b\}$ et $F = A^* \setminus A^*bbA^*$. $F$ est récurrent car pour tout $u, v \in F$ on a $uav \in F$ .

Un ensemble $F$ est dit *uniformément récurrent* s'il est factoriel et pour tous $u \in F$ il existe un $n = n(u) \geq 1$ t.q. $u$ est facteur de tous les mots dans $F \cap A^n$.

**Proposition**

Un ensemble uniformément récurrent est récurrent.

# *Prolongements*

Soit $F \subseteq A^*$. Pour un mot $w \in F$ on dénote

$$\begin{aligned} L(w) &= \{a \in A \,|\, aw \in F\} \\ R(w) &= \{a \in A \,|\, wa \in F\} \\ E(w) &= \{(a, b) \in A \times A \,|\, awb \in F\} \end{aligned}$$

$$\ell(w) = \mathrm{Card}\,(L(w))\,, \quad r(w) = \mathrm{Card}\,(R(w))\,, \quad e(w) = \mathrm{Card}\,(E(w))\,.$$

# *Prolongements*

Soit $F \subseteq A^*$. Pour un mot $w \in F$ on dénote

$$\begin{aligned} L(w) &= \{a \in A \mid aw \in F\} \\ R(w) &= \{a \in A \mid wa \in F\} \\ E(w) &= \{(a,b) \in A \times A \mid awb \in F\} \end{aligned}$$

$$\ell(w) = \mathrm{Card}\,(L(w))\,, \quad r(w) = \mathrm{Card}\,(R(w))\,, \quad e(w) = \mathrm{Card}\,(E(w))\,.$$

Un mot $w$ est dit *extensible à gauche* si $\ell(w) > 0$. De même pour *extensible à droite* et *biextensible*.

Un ensemble $F$ est dit *essentiel à gauche* si tout mot dans $F$ est extensible à gauche. De même pour *essentiel à droite* et *biessentiel*.

Un mot $w$ est dit *spécial à gauche* si $\ell(w) \geq 2$. De même pour spécial à droite. Un mot spécial à la fois à gauche et à droit est dit *bispécial*.

# *Ensembles neutres*

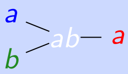
Soit $F$ un ensemble factoriel. On dit qu'un mot $w$ est *fort* si

$$e(w) > \ell(w) + r(w) - 1.$$

$w$ est *faible* si l'inégalité est inverse et *neutre* si on a l'égalité.

**Exemple**

Soit $F = A^* \backslash A^*bbA^*$. Le mot $ab$ est neutre car $\ell(ab) = 2$, $r(ab) = 1$ et $e(ab) = 2$.



# Ensembles neutres

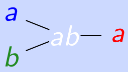
Soit $F$ un ensemble factoriel. On dit qu'un mot $w$ est *fort* si

$$e(w) > \ell(w) + r(w) - 1.$$

$w$ est *faible* si l'inégalité est inverse et *neutre* si on a l'égalité.

**Exemple**

Soit $F = A^* \backslash A^* bbA^*$. Le mot $ab$ est neutre car $\ell(ab) = 2$, $r(ab) = 1$ et $e(ab) = 2$.




Un ensemble $F$ est dit *fort* s'il est factoriel et tout mot biextensible dans $F$ est fort ou neutre. Si tout mot est neutre on dit que l'ensemble est *neutre*.

# *Ensembles Sturmiens*

Un mot infini est dit *épisturmien* si l'ensemble de ses facteurs est fermé par image miroir et pour tout $n$ il contient au plus un mot de longueur $n$ spécial à droite. Il est dit *épisturmien strict* s'il contient exactement un facteur spécial à droite $u = u(n)$ pour chaque longueur $n$ et, de plus, celui-ci est t.q. $r(u) = \mathrm{Card}\,(A)$.

Un ensemble *Sturmien* est l'ensemble de facteurs d'un mot épisturmien strict.

## *Ensembles Sturmiens*

Un mot infini est dit *épisturmien* si l'ensemble de ses facteurs est fermé par image miroir et pour tout $n$ il contient au plus un mot de longueur $n$ spécial à droite. Il est dit *épisturmien strict* s'il contient exactement un facteur spécial à droite $u = u(n)$ pour chaque longueur $n$ et, de plus, celui-ci est t.q. $r(u) = \mathrm{Card}\,(A)$.

Un ensemble *Sturmien* est l'ensemble de facteurs d'un mot épisturmien strict.

**Proposition**

Soit $F$ un ensemble Sturmien. Alors $\mathrm{Card}\,(F \cap A^n) = kn + 1$ pour tout $n$, où $k = \mathrm{Card}\,(A) - 1$. De plus $F$ est neutre.

## *Ensemble de Fibonacci*

**Exemple**

Soit $A = \{a, b\}$. Le *mot de Fibonacci* est le point fixe $x = f^{\omega}(a)$ du morphisme $f : A^* \to A^*$ defini par $f(a) = ab$ et $f(b) = a$.

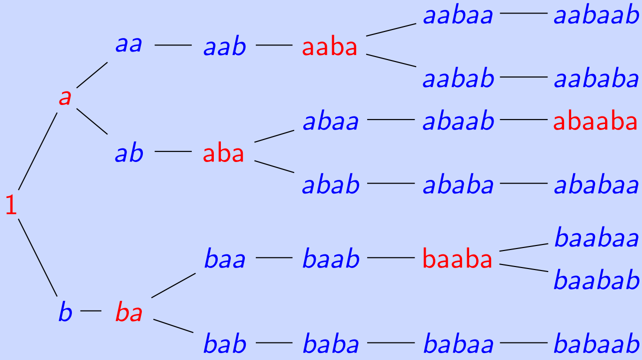
$$x = abaababaabaababaababaabaababaabaab \cdots$$

# *Ensemble de Fibonacci*

## Exemple

Soit $A = \{a, b\}$. Le *mot de Fibonacci* est le point fixe $x = f^{\omega}(a)$ du morphisme $f : A^* \to A^*$ defini par $f(a) = ab$ et $f(b) = a$.

$$x = abaababaabaababaababaabaababaabaab \cdots$$



# Codes

Un ensemble $X \subseteq A^*$ est dit *code* si pour tout $x_i, y_j \in X$, $n, m > 0$

$$x_1 x_2 \cdots x_n = y_1 y_2 \cdots y_m \quad \Longrightarrow \quad n = m \text{ et } x_i = y_i.$$

# Codes

Un ensemble $X \subseteq A^*$ est dit *code* si pour tout $x_i, y_j \in X,\ n, m > 0$

$$x_1 x_2 \cdots x_n = y_1 y_2 \cdots y_m \quad \Longrightarrow \quad n = m \text{ et } x_i = y_i.$$

Un *code préfixe* est un ensemble de mots non vides tel qu'aucun de ses éléments est un préfixe d'un autre.

**Exemple**

L'ensemble $X = \{b, ab\}$ est un code préfixe.

Un *code bifixe* est un ensemble qui est à la fois un code préfixe et un code suffixe.

**Exemple**

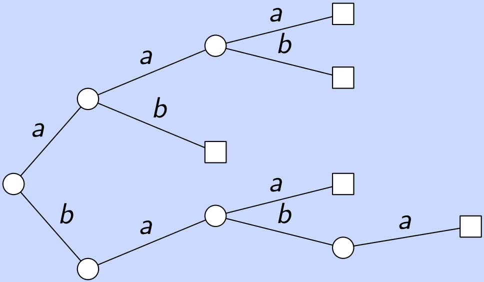
L'ensemble $X = \{a, bab\}$ est un code bifixe.

## *Codes $F$-maximaux*

Un code bifixe $X \subseteq F$ est dit $F$-*maximal bifixe* s'il n'est pas strictement contenu dans aucun code bifixe $Y \subseteq F$.

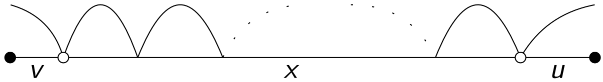
**Exemple**

Soit $F = A^* \setminus A^* bbA^*$. L'ensemble $X = \{aaa, aab, ab, baa, baba\}$ est un code $F$-maximal préfixe.



# *Degré d'un code*

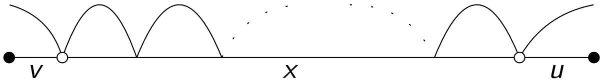
Un *parse* d'un mot $w$ par rapport à un ensemble $X$ est une triple $(v, x, u)$ t.q. $w = vxu$ où $v \in A^* \setminus A^*X$, $x \in X^*$ et $u \in A^* \setminus XA^*$.




Le nombre de parses de $w$ par rapport à $X$ est dénoté par $\delta_X(w)$.

# *Degré d'un code*

Un *parse* d'un mot $w$ par rapport à un ensemble $X$ est une triple $(v, x, u)$ t.q. $w = vxu$ où $v \in A^* \setminus A^*X$, $x \in X^*$ et $u \in A^* \setminus XA^*$.



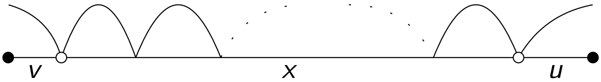

Le nombre de parses de $w$ par rapport à $X$ est dénoté par $\delta_X(w)$.

**Exemple**

Soit $X = \{aaba, ab, baa, baba\}$. On a $\delta_X(aaba) = 3$. En effet les trois parses sont : $(1, aaba, 1)$, $(a, ab, a)$ et $(aa, 1, ba)$.

# *Degré d'un code*

Un *parse* d'un mot $w$ par rapport à un ensemble $X$ est une triple $(v, x, u)$ t.q. $w = vxu$ où $v \in A^* \setminus A^*X$, $x \in X^*$ et $u \in A^* \setminus XA^*$.




Le nombre de parses de $w$ par rapport à $X$ est dénoté par $\delta_X(w)$.

**Exemple**

Soit $X = \{aaba, ab, baa, baba\}$. On a $\delta_X(aaba) = 3$. En effet les trois parses sont : $(1, aaba, 1)$, $(a, ab, a)$ et $(aa, 1, ba)$.

Soit $F$ un ensemble factoriel. le $F$-*degré* de $X$ est

$$d_F(X) = \max_{w \in F} \delta_X(w).$$

# *Théorème de la Cardinalité*

**Théorème de la Cardinalité [BDDPRR, 2013]**

Soient $F$ un ensemble récurrent contanant $A$ et $X \subseteq F$ un code bifixe $F$-maximal fini de $F$-degré $d$. Si $F$ est fort alors $\operatorname{Card}(X) \geq dk + 1$, où $k = \operatorname{Card}(A) - 1$. Si $F$ et neutre alors on a l'égalité.

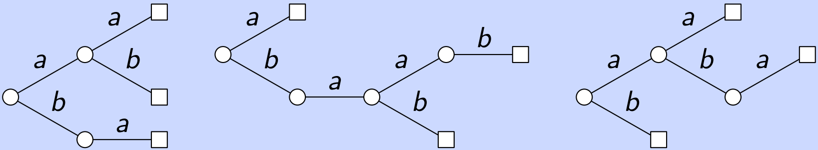
# *Théorème de la Cardinalité*

**Théorème de la Cardinalité [BDDPRR, 2013]**

Soient $F$ un ensemble récurrent contanant $A$ et $X \subseteq F$ un code bifixe $F$-maximal fini de $F$-degré $d$. Si $F$ est fort alors $\mathrm{Card}\,(X) \geq dk+1$, où $k = \mathrm{Card}\,(A) - 1$. Si $F$ et neutre alors on a l'égalité.

**Exemple**

Soit $F$ l'ensemble de Fibonacci. Les codes de $F$-maximaux bifixes de $F$-degré $2$ sont :



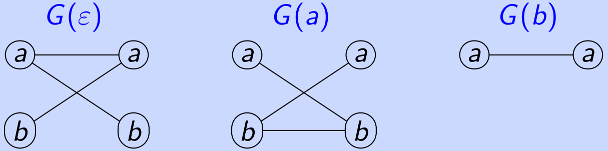
# Outline

# *Condition de l'arbre*

Soient $F$ un ensemble factoriel et $w$ un mot biextensible. On définit *graphe d'extension* en $F$ de $w$ le graphe $G(w)$ avec sommets l'union disjointe de $L(w)$ et $R(w)$ et arêtes en $E(w)$.

**Exemple**

Soit $F$ l'ensemble de Fibonacci.

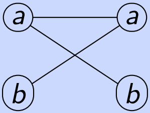


Soient $F$ un ensemble factoriel et $w$ un mot biextensible. On définit *graphe d'extension* en $F$ de $w$ le graphe $G(w)$ avec sommets l'union disjointe de $L(w)$ et $R(w)$ et arêtes en $E(w)$.

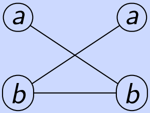
**Exemple**

Soit $F$ l'ensemble de Fibonacci.

$G(\varepsilon)$




$G(a)$




$G(b)$


On dit que $F$ satisfait la *condition de l'arbre* si pour tout mot $w \in F$ biextensible, le graphe $G(w)$ est acyclique et connexe.

# *Condition de l'arbre*

**Proposition**

Un ensemble Sturmien satisfait la condition de l'arbre.

# *Condition de l'arbre*

## Proposition

Un ensemble Sturmien satisfait la condition de l'arbre.

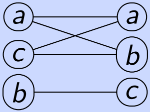
## Proposition

Un ensemble satisfaisant la condition de l'arbre est neutre. L'inverse n'est pas vrai.

## Exemple

Soient $A = \{a, b, c\}$ et $F$ l'ensemble des facteurs de $a^*\{bc, bcbc\}a^*$. Les seuls mots bispécieux sont $\varepsilon$, $bc$ et $a^n$.

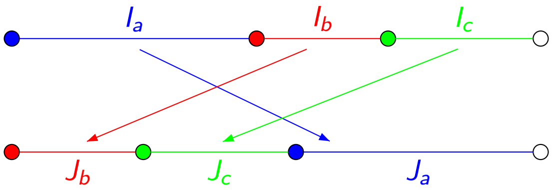
$G(\varepsilon)$



# *Échanges d'intervalles*

Soit $(I_a)_{a\in A}$ une partition ordonné de $[0,1[$. Une *transformation d'échange d'intervalles* est une fonction $T : [0,1[ \to [0,1[$ définie par

$$T(z) = z + \alpha_z \quad \text{si } z \in I_a.$$



# *Échanges d'intervalles régulièrs*

Une transformation $T$ est dite *minimale* si pour tout $z \in [0, 1[$ l'orbite $\{T^n(z) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans $[0, 1[$.

# *Échanges d'intervalles réguliers*

Une transformation $T$ est dite *minimale* si pour tout $z \in [0,1[$ l'orbite $\{T^n(z) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans $[0,1[$.

Une transformation $T$ est dite *régulière* si les orbites des *points de séparations* (points de singularité) non nuls sont infinies et disjointes.

**Théorème [Keane, 1975]**

Une transformation d'échange d'intervalles régulière est minimale.

## *Codage naturel*

Soit $T$ une transformation d'échange d'intervalles par rapport à $(I_a)_{a \in A}$. Le *codage naturel* de $T$ par rapport à $z \in [0,1[$ est le mot infini $\Sigma_T(z) = a_0 a_1 \cdots \in A^\omega$ défini par

$$a_n = a \quad \text{si } T^n(z) \in I_a.$$

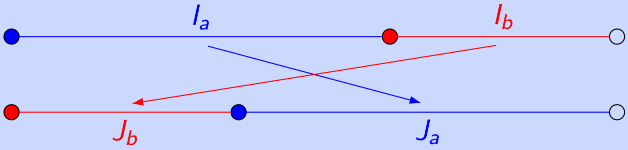
# *Codage naturel*

Soit $T$ une transformation d'échange d'intervalles par rapport à $(I_a)_{a \in A}$. Le *codage naturel* de $T$ par rapport à $z \in [0,1[$ est le mot infini $\Sigma_T(z) = a_0 a_1 \cdots \in A^\omega$ défini par

$$a_n = a \quad \text{si } T^n(z) \in I_a.$$

**Exemple**

Le mot de Fibonacci est le codage naturel d'une rotation d'angle $\alpha = (3 - \sqrt{5})/2$ par rapport au point $\alpha$, i.e. $T(z) = z + \alpha \bmod 1$.



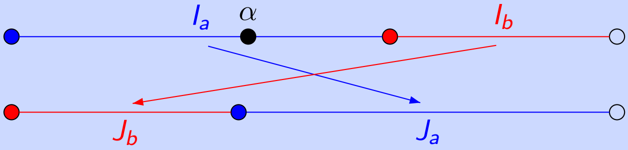
# Codage naturel

Soit $T$ une transformation d'échange d'intervalles par rapport à $(I_a)_{a\in A}$. Le *codage naturel* de $T$ par rapport à $z \in [0,1[$ est le mot infini $\Sigma_T(z) = a_0 a_1 \cdots \in A^\omega$ défini par

$$a_n = a \quad \text{si } T^n(z) \in I_a.$$

**Exemple**

Le mot de Fibonacci est le codage naturel d'une rotation d'angle $\alpha = (3-\sqrt{5})/2$ par rapport au point $\alpha$, i.e. $T(z) = z + \alpha \bmod 1$.




$$\Sigma_T(z) = a$$

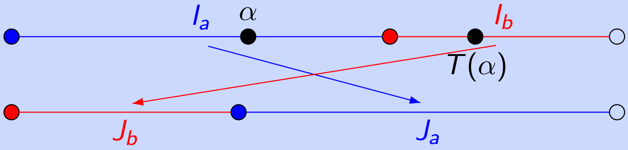
# *Codage naturel*

Soit $T$ une transformation d'échange d'intervalles par rapport à $(I_a)_{a\in A}$. Le *codage naturel* de $T$ par rapport à $z \in [0,1[$ est le mot infini $\Sigma_T(z) = a_0 a_1 \cdots \in A^\omega$ défini par

$$a_n = a \quad \text{si } T^n(z) \in I_a.$$

**Exemple**

Le mot de Fibonacci est le codage naturel d'une rotation d'angle $\alpha = (3-\sqrt{5})/2$ par rapport au point $\alpha$, i.e. $T(z) = z + \alpha \bmod 1$.




$$\Sigma_T(z) = a\, b$$

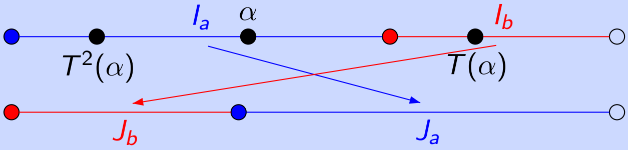
## Codage naturel

Soit $T$ une transformation d'échange d'intervalles par rapport à $(I_a)_{a \in A}$. Le *codage naturel* de $T$ par rapport à $z \in [0,1[$ est le mot infini $\Sigma_T(z) = a_0 a_1 \cdots \in A^\omega$ défini par

$$a_n = a \quad \text{si} \quad T^n(z) \in I_a.$$

**Exemple**

Le mot de Fibonacci est le codage naturel d'une rotation d'angle $\alpha = (3 - \sqrt{5})/2$ par rapport au point $\alpha$, i.e. $T(z) = z + \alpha \bmod 1$.




$$\Sigma_T(z) = a\, b\, a$$

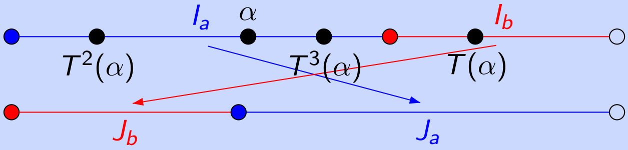
# Codage naturel

Soit $T$ une transformation d'échange d'intervalles par rapport à $(I_a)_{a\in A}$. Le *codage naturel* de $T$ par rapport à $z \in [0,1[$ est le mot infini $\Sigma_T(z) = a_0 a_1 \cdots \in A^\omega$ défini par

$$a_n = a \quad \text{si } T^n(z) \in I_a.$$

**Exemple**

Le mot de Fibonacci est le codage naturel d'une rotation d'angle $\alpha = (3-\sqrt{5})/2$ par rapport au point $\alpha$, i.e. $T(z) = z + \alpha \bmod 1$.




$$\Sigma_T(z) = a\,b\,a\,a$$

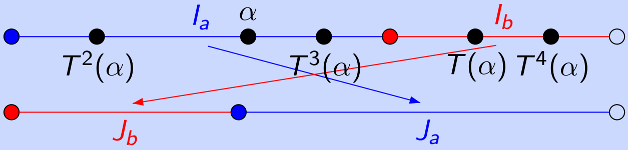
# *Codage naturel*

Soit $T$ une transformation d'échange d'intervalles par rapport à $(I_a)_{a \in A}$. Le *codage naturel* de $T$ par rapport à $z \in [0,1[$ est le mot infini $\Sigma_T(z) = a_0 a_1 \cdots \in A^\omega$ défini par

$$a_n = a \quad \text{si } T^n(z) \in I_a.$$

**Exemple**

Le mot de Fibonacci est le codage naturel d'une rotation d'angle $\alpha = (3-\sqrt{5})/2$ par rapport au point $\alpha$, i.e. $T(z) = z + \alpha \bmod 1$.




$$\Sigma_T(z) = a\,b\,a\,a\,b$$

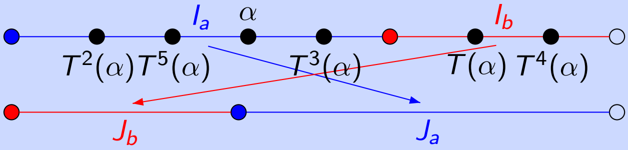
## Codage naturel

Soit $T$ une transformation d'échange d'intervalles par rapport à $(I_a)_{a\in A}$. Le *codage naturel* de $T$ par rapport à $z \in [0,1[$ est le mot infini $\Sigma_T(z) = a_0 a_1 \cdots \in A^\omega$ défini par

$$a_n = a \quad \text{si } T^n(z) \in I_a.$$

**Exemple**

Le mot de Fibonacci est le codage naturel d'une rotation d'angle $\alpha = (3-\sqrt{5})/2$ par rapport au point $\alpha$, i.e. $T(z) = z + \alpha \bmod 1$.




$$\Sigma_T(z) = a\,b\,a\,a\,b\,a\cdots$$

# *Ensembles d'échanges d'intervalles*

**Proposition**

Si $T$ est minimale, l'ensemble des facteurs de $\Sigma_T(z)$ ne dépend pas du point $z$. Dans ce cas on dénote l'ensemble $F(T)$.

Quand $T$ est régulière on appelle $F(T)$ un *ensemble d'échange d'intervalles régulier*.

# *Ensembles d'échanges d'intervalles*

**Proposition**

Si $T$ est minimale, l'ensemble des facteurs de $\Sigma_T(z)$ ne dépend pas du point $z$. Dans ce cas on dénote l'ensemble $F(T)$.

Quand $T$ est régulière on appelle $F(T)$ un *ensemble d'échange d'intervalles régulier*.

**Proposition**

Si $T$ est minimale alors $F(T)$ est uniformément récurrent. De plus, si $T$ est régulière alors $F(T)$ satisfait la condition de l'arbre.

# Outline

# *Mots de premier retour*

Soit $F$ un ensemble factoriel. Pour un mot $w \in F$ on définit

$$\Gamma_F(w) = \{z \in F \mid wz \in A^+w \cap F\}$$

l'ensemble des *mots de retour* (*à droite*), et

$$\mathcal{R}_F(w) = \Gamma_F(w) \setminus \Gamma_F(w)A^+$$

l'ensemble des *mots de premier retour* (*à droite*).

# *Mots de premier retour*

Soit $F$ un ensemble factoriel. Pour un mot $w \in F$ on définit

$$\Gamma_F(w) = \{z \in F \mid wz \in A^+ w \cap F\}$$

l'ensemble des *mots de retour* (*à droite*), et

$$\mathcal{R}_F(w) = \Gamma_F(w) \setminus \Gamma_F(w)A^+$$

l'ensemble des *mots de premier retour* (*à droite*).

**Exemple**

Soit $F$ l'ensemble de Fibonacci. On a $\mathcal{R}_F(aa) = \{baa, babaa\}$.

$$x = abaababaabaababaababaabaababaabaab\cdots$$

## *Mots de premier retour*

Soit $F$ un ensemble factoriel. Pour un mot $w \in F$ on définit

$$\Gamma_F(w) = \{z \in F \mid wz \in A^+w \cap F\}$$

l'ensemble des *mots de retour* (*à droite*), et

$$\mathcal{R}_F(w) = \Gamma_F(w) \setminus \Gamma_F(w)A^+$$

l'ensemble des *mots de premier retour* (*à droite*).

**Exemple**

Soit $F$ l'ensemble de Fibonacci. On a $\mathcal{R}_F(aa) = \{baa, babaa\}$.

$$x = ab\color{green}{aa}\color{red}{babaa}\color{blue}{baababaababaabaababaabaab\cdots}$$

# *Mots de premier retour*

Soit $F$ un ensemble factoriel. Pour un mot $w \in F$ on définit

$$\Gamma_F(w) = \{z \in F \mid wz \in A^+w \cap F\}$$

l'ensemble des *mots de retour* (*à droite*), et

$$\mathcal{R}_F(w) = \Gamma_F(w) \setminus \Gamma_F(w)A^+$$

l'ensemble des *mots de premier retour* (*à droite*).

**Exemple**

Soit $F$ l'ensemble de Fibonacci. On a $\mathcal{R}_F(aa) = \{baa, babaa\}$.

$$x = abaababaabaababaababaabaababaabaab\cdots$$

# *Théorème de Retour*

**Théorème [Justin, Vuillon, 2000]**

Soit $F$ un ensemble Sturmien. Pour tout mot $w \in F$, l'ensemble $\mathcal{R}_F(w)$ est une base de $A^\circ$.

## *Théorème de Retour*

**Théorème [Justin, Vuillon, 2000]**

Soit $F$ un ensemble Sturmien. Pour tout mot $w \in F$, l'ensemble $\mathcal{R}_F(w)$ est une base de $A^\circ$.

**Théorème de Retour [BDDPRR, 2013]**

Soit $T$ une transformation d'échange d'intervalles régulière sur l'alphabet $A$. Pour tout mot $w \in F(T)$, $\mathcal{R}_F(w)$ est une base de $A^\circ$.

# *Théorème de Retour*

**Théorème [Justin, Vuillon, 2000]**

Soit $F$ un ensemble Sturmien. Pour tout mot $w \in F$, l'ensemble $\mathcal{R}_F(w)$ est une base de $A^\circ$.

**Théorème de Retour [BDDPRR, 2013]**

Soit $T$ une transformation d'échange d'intervalles régulière sur l'alphabet $A$. Pour tout mot $w \in F(T)$, $\mathcal{R}_F(w)$ est une base de $A^\circ$.

**Exemple**

Soit $F$ l'ensemble de Fibonacci. On a $\mathcal{R}_F(aa) = \{baa, babaa\}$. Et

$$\begin{cases} a & = & (baa)(babaa)^{-1}(baa) \\ b & = & (baa)a^{-1}a^{-1} \end{cases}$$

# *Ensembles normaux*

On dit qu'un ensemble uniformément récurrent $F \subseteq A^+$ est *normal* si :

(i) $F$ satisfait la condition de l'arbre ;

(ii) pour tout $w \in F$, $\mathcal{R}_F(w)$ est une base du groupe libre $A^\circ$.

## Ensembles normaux

On dit qu'un ensemble uniformément récurrent $F \subseteq A^+$ est *normal* si :

(i) $F$ satisfait la condition de l'arbre ;

(ii) pour tout $w \in F$, $\mathcal{R}_F(w)$ est une base du groupe libre $A^\circ$.

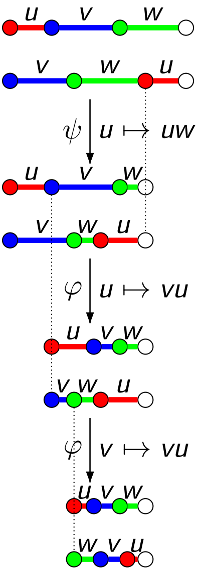
Si $F$ est Sturmien alors il est normal. De plus

**Théorème**

Soit $F$ une ensemble d'échange d'intervalles. Alors $F$ est normal.

La preuve utilise une généralisation de l'induction de Rauzy.

# *Induction (bilatère) de Rauzy*




La séquence de 3 inductions (une à droite suive par deux à gauche) permette d'attaindre la transformation induite sur l'intervalle $J_w$.
L'ensemble des mots de premier retour résultant est

$$\mathcal{R}_F(w) = \{vuw, vvuw, w\}$$

car on a

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} u & \mapsto & u & \mapsto & vu & \mapsto & vuw \\ v & \mapsto & vu & \mapsto & vvu & \mapsto & vvvuw \\ w & \mapsto & w & \mapsto & w & \mapsto & w \end{array}\right.$$

## *Propriété de la base d'indice fini*

On dit qu'un ensemble $F$ satisfait la *propriété de la base d'indice fini* si tout code bifixe fini $X \subseteq F$ est $F$-maximal bifixe de $F$-degré $d$ si et seulement si $X$ est une base d'un sous-groupe d'indice $d$ de $A^\circ$.

## *Propriété de la base d'indice fini*

On dit qu'un ensemble $F$ satisfait la *propriété de la base d'indice fini* si tout code bifixe fini $X \subseteq F$ est $F$-maximal bifixe de $F$-degré $d$ si et seulement si $X$ est une base d'un sous-groupe d'indice $d$ de $A^\circ$.

**Théorème de la Base [BDDPRR, 2013]**

Tout ensemble normal $F$ a la propriété de la base d'indice fini.

# *Propriété de la base d'indice fini*

**Exemple**

Soit $F$ l'ensemble de Fibonacci. Les ensembles $F \cap A^n$ sont des bases des sous-groupes des mots de longueur un multiple de $n$, i.e. de $\langle A^n \rangle \leq A^\circ$.

# *Propriété de la base d'indice fini*

**Exemple**

Soit $F$ l'ensemble de Fibonacci. Les ensembles $F \cap A^n$ sont des bases des sous-groupes des mots de longueur un multiple de $n$, i.e. de $\langle A^n \rangle \leq A^\circ$.

Pour $n = 2$ on a $F \cap A^2 = \{aa, ab, ba\}$ et $bb = ba\,(aa)^{-1}\,ab$.

# *Propriété de la base d'indice fini*

### Exemple

Soit $F$ l'ensemble de Fibonacci. Les ensembles $F \cap A^n$ sont des bases des sous-groupes des mots de longueur un multiple de $n$, i.e. de $\langle A^n \rangle \leq A^\circ$.

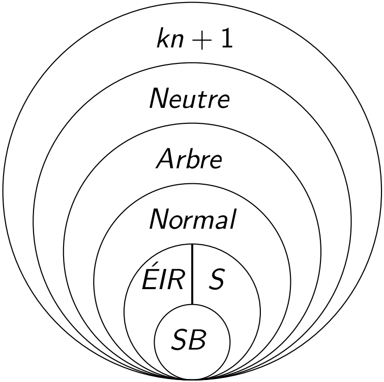
Pour $n = 2$ on a $F \cap A^2 = \{aa, ab, ba\}$ et $bb = ba\,(aa)^{-1}\,ab$.

Pour $n = 3$ on a $F \cap A^3 = \{aab, aba, baa, bab\}$ et

$$\begin{aligned} aaa &= aab\,(bab)^{-1}\,baa \\ abb &= aba\,(baa)^{-1}\,bab \\ bba &= bab\,(aab)^{-1}\,aba \\ bbb &= bba\,(aba)^{-1}\,aab \end{aligned}$$

# *Outline*

# *Conclusions*




| | TC | TR | TB |
|---|---|---|---|
| Sturmien | oui | oui | oui |
| ÉIR | oui | oui | oui |
| Normal | oui | oui | oui |
| Arbre | oui | ? | ? |
| Neutre | oui | non | non |
| $kn+1$ | non | non | non |

FIGURE*:* Les classes d'ensembles uniformément récurrents sur $k+1$ lettres et les théorèmes satisfaits par les différentes classes : Théorème de la Cardinalité ($TC$), Théorème de Retour ($TR$), Théorème de la Base ($TB$).

# Questions ?